Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα Μέρος 1 Στοχαστικές Διαδικασίες με Κόστη

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

12/9/2022-5/10/2022

Εισαγωγή

Δομή μαθήματος

- Σκοπός του μαθήματος: Επισκόπηση μεθόδων και μοντέλων της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας
- Δομή:
  1. Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη (Ανανεωτικές, Μαρκοβιανές)
  2. Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός
  3. Θεωρία Ουρών Αναμονής
  4. Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Εισαγωγή στην Ανανεωτική Θεωρία

Σημειακές διαδικασίες

- S_k: Χρόνος k-οστού γεγονότος.
- X_k: Ενδιάμεσος χρόνος $(k-1)$-οστού και k-οστού γεγονότος.
- $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$, απαριθμήτρια διαδικασία της $\{S_n\}$.

Ανανεωτικές διαδικασίες

- $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- S_k: Χρόνος k-οστού γεγονότος.
- X_k: Ενδιάμεσος χρόνος $(k-1)$-οστού και k-οστού γεγονότος.
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$.
- Αν οι X_k, $k = 1, 2, \ldots$, ανεξάρτητες και ισόνομες $\sim F_X(t)$ τότε:
  $\{S_k\}$: Ανανεωτική ακολουθία (Renewal sequence).
  $N(t)$: Απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία (Renewal process).

Βασικοί υπολογισμοί

- Βασικά ερωτήματα:
  $F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] =;$
  $E[S_k] =;$
  $p_k(t) = \Pr[N(t) = k] =;$
  $m(t) = m_X(t) = E[N(t)] =;$ (Ανανεωτική συνάρτηση).

- Σχέση-κλειδί:

$$\{S_k \leq t\} = \{N(t) \geq k\}$$

Ολοκλήρωμα RS

- $F(t)$: αύξουσα, κατά τμήματα συνεχής, δεξιά συνεχής, παραγωγίσιμη (π.χ., συνάρτηση κατανομής μεικτής τ.μ. με διακριτό και απόλυτα συνεχές μέρος).
- $g(t)$: συνεχής συνάρτηση.
- Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της g ως προς F:

$$\int_a^b g(x)dF(x) \overset{\text{ορσ}}{=} \sum_x g(x)(F(x) - F(x-)) + \int_a^b g(x)F'(x)dx,$$

με την άθροιση πάνω σε όλα τα σημεία ασυνέχειας της F.

Ολοκλήρωμα RS(συνέχεια)

- Όταν $F(x) = F_X(x)$ (συνάρτηση κατανομής), τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = E[g(X)].$$

Συνέλιξη κατανομών (RS)

- Έστω $X, Y \geq 0$, ανεξάρτητες, με $X \sim F_X(t)$ και $Y \sim F_Y(t)$.
- Η συνέλιξη LS των F_X, F_Y ορίζεται ως

$$(F_X * F_Y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-u) dF_Y(u).$$

- Η συνέλιξη των F_X, F_Y είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των X, Y.
- Προσοχή! Η συνήθης συνέλιξη συναρτήσεων

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du$$

δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας αθροίσματος τ.μ.

Μετασχηματισμός LS

- Έστω $X \geq 0$, με σ.κ. $F_X(x)$. Ο μετασχηματισμός LS είναι

$$\tilde{F}_X(s) \overset{\text{ορσ}}{=} \int_0^\infty e^{-st} dF_X(t), \quad \Re(s) \geq 0.$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών LS

Τυχαία μεταβλητή X	Συνάρτηση $\phi(x)$ (ή $F_X(x)$)	Μετασχηματισμός LS $\tilde{\phi}(s)$ (ή $\tilde{F}_X(s)$)
–	$\phi(x) = x$	$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{s}$
–	$\phi(x) = \int_0^\infty \phi_1(x-u)d\phi_2(u)$	$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_1(s)\tilde{\phi}_2(s)$
–	$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$	$\tilde{\phi}(s) = a_1\tilde{\phi}_1(s) + a_2\tilde{\phi}_2(s)$
$X = c \geq 0$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c \\ 1 & \text{αν } x \geq c \end{cases}$	$\tilde{F}_X(s) = e^{-cs}$
$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$
$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$	$\tilde{F}_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
$Z = X + Y$, αν	$F_Z(z) = \int_0^\infty F_Y(z-x)dF_X(x)$	$\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)$
$Z = \begin{cases} X & \text{πιθ. } p \\ Y & \text{πιθ. } q \end{cases}$	$F_Z(z) = pF_X(z) + qF_Y(z)$	$\tilde{F}_Z(s) = p\tilde{F}_X(s) + q\tilde{F}_Y(s)$

Πίνακας: Συναρτήσεις και αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes.

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Κατανομή χρόνων γεγονότων

$$\begin{aligned} F_{S_k}(t) &= \Pr[S_k \leq t] = \Pr[X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq t] \\ &= F_X^{*k}(t). \end{aligned}$$

- Μέση τιμή χρόνων γεγονότων

$$E[S_k] = kE[X].$$

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Συνάρτηση πιθανότητας αριθμού γεγονότων

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \Pr[N(t)=k] = \Pr[S_k \le t < S_{k+1}] \\ &= \Pr[S_k \le t] - \Pr[S_{k+1} \le t] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*k+1}(t). \end{aligned}$$

- Μέση τιμή αριθμού γεγονότων (ανανεωτική συνάρτηση)

$$\begin{aligned} m(t) &= E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \le t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \le t] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t). \end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί LS βασικών ποσοτήτων

- Ορισμοί

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dF_{S_k}(t), \\
\tilde{p}_k(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dp_k(t), \\
\tilde{m}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dm(t).
\end{aligned}$$

Βασικοί υπολογισμοί μετασχ. LS

- Υπολογισμοί

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k, \\
\tilde{p}_k(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) - \widetilde{F_X^{*k+1}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1} \\
&= (1-\tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \\
\tilde{m}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{F_X^{*k}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}.
\end{aligned}
$$

Μεθοδολογία υπολογισμού βασικών ποσοτήτων

- Με χρήση μετασχηματισμών LS:

$$F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \to \tilde{F}_{S_k}(s), \tilde{p}_k(s), \tilde{m}_X(s)$$
$$\to F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t).$$

Παράδειγμα

- Ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_k \sim \text{Exp}(\lambda)$(στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ). $F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t)$;

$$
\begin{aligned}
F_X(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \to \\
\tilde{F}_X(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + s} \to \\
\tilde{F}_{S_k}(s) &= (\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k, \\
\tilde{p}_k(s) &= (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{k+1} \\
\tilde{m}(s) &= \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντιστροφή:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k \quad \rightarrow \quad F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \\
\tilde{p}_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{k+1} \quad \rightarrow \\
p_k(t) &= \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) - \left(1 - \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \\
\tilde{m}(s) &= \frac{\lambda}{s} \quad \rightarrow \quad m(t) = \lambda t.
\end{aligned}
$$

Ανανεωτικός συλλογισμός
Ανανεωτικές εξισώσεις

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Ιδέα

- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία.
- $h(t)$: συνάρτηση που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0, t]$,
  π.χ. $m(t)$ ή $E[S_{N(t)+1} - t]$
- Ανανεωτικός συλλογισμός: Δέσμευση στον χρόνο $S_1 = u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας.
- Η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου.

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Εξισώσεις

- Ο ανανεωτικός συλλογισμός οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις του τύπου

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου
$h(t)$: η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα,
$d(t)$: μια γνωστή συνάρτηση,
$F_X(t)$: η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα: Ανανεωτική εξίσωση για την $m(t)$

- $h(t) = m(t)$: ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$,
- S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$,
- $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(N(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} 1 + N(t-u).$$

- Επομένως,

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = F_X(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = F_X(t)$.

- Αναφέρεται ως η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση.

Παράδ: Αναν. εξίσωση για $R(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$

- $h(t) = E[R(t)] = E[S_{N(t)+1} - t]$: μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός από τη στιγμή t.
- S_1: ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$.
- $F_X(t)$: η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(R(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} R(t-u).$$

- Επομένως,

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t-u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$h(t) = \int_t^\infty (u - t) dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u)dy = \int_t^\infty (1-F_X(y))dy. \end{aligned}$$

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- Μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t),$$

$m_X(t)$: η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης - Αιτιολόγηση

$$
\begin{aligned}
& h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{F}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \tilde{d}(s)\frac{1-\tilde{F}_X(s)+\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}. \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & h(t) = d(t) + (d * m_X)(t).
\end{aligned}
$$

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης - λύσης

- Έστω ότι κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ επάγει μια επίδραση που διαχέεται στον χρόνο.
- $d(t)$: Επίδραση ενός γεγονότος t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωσή του.
- $h(t)$: Συνολική επίδραση από όλα τα γεγονότα μέχρι τη στιγμή t.
- Έστω ότι συμβαίνει γεγονός (γεγονός-0) τη στιγμή 0.

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
  $=$ Επίδραση από γεγονός-0 $+$ Συνολική επίδραση από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u).$$

Ερμηνεία λύσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
  $=$ Επίδραση από γεγονός-0 $+$ Άθροισμα επιδράσεων από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u) dF_{S_k}(u) \\ &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u) dF_X^{*k}(u) \\ &= d(t) + \int_0^t d(t-u) dm_X(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$

- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) \\ &= \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy + \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1 - F_X(y))dydm_X(u). \end{aligned}$$

- Δύσχρηστος.Συχνά ενδιαφέρει μόνο η οριακή λύση, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$.

Υπολογισμοί ανανεωτικών συναρτήσεων

- Υπολογισμός $m_X(t)$: Απαραίτητος για τη χρήση λύσεων ανανεωτικών εξισώσεων.
- 3 βασικοί τρόποι:
  1. Αρχικός τύπος:

$$m_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$

  2. Τύπος μετασχηματισμού LS + Αντιστροφή:

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$

  3. Αναν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u) dF_X(u).$$

Παράδειγμα υπολογισμού αναν. συνάρτησης

- $X \sim \text{Hyperexponential}(p, \lambda, q, \mu)$,δηλ.

$$X = \begin{cases} Y \sim \text{Exp}(\lambda) & \text{με πιθ. } p, \\ Z \sim \text{Exp}(\mu) & \text{με πιθ. } q. \end{cases}$$

οπότε

$$F_X(t) = pF_Y(t) + qF_Z(t).$$

- $m_X(t) =;$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον αρχικό τύπο:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (pF_Y + qF_Z)^{*k}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p^j q^{k-j} (F_Y^{*j} * F_Z^{*k-j})(t) \\ &= \cdots, \end{aligned}$$

$F_Y^{*j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang(j, λ),
$F_Z^{*k-j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang$(k-j, \mu)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον τύπο του μετασχηματισμού LS:

$$\tilde{m}_X(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{F}_X(s) &= p\tilde{F}_Y(s) + q\tilde{F}_Z(s) \\ &= p\frac{\lambda}{\lambda+s} + q\frac{\mu}{\mu+s}.\end{aligned}$$

- Άρα

$$\tilde{m}_X(s) = \cdots = \frac{(\lambda p+\mu q)s+\lambda\mu}{s(s+\lambda q+\mu p)}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda q+\mu p} = \frac{A(s+\lambda q+\mu p)+Bs}{s(s+\lambda q+\mu p)}.$$

- Εύρεση των σταθερών:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_X(s) &= \frac{(\lambda p+\mu q)s+\lambda\mu}{s(s+\lambda q+\mu p)} = \frac{A(s+\lambda q+\mu p)+Bs}{s(s+\lambda q+\mu p)} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A+B & = \lambda p+\mu q \\ (\lambda q+\mu p)A & = \lambda\mu \end{array} \right\} \Rightarrow A, B = \cdots . \end{aligned}$$

- Αντιστροφή:

$$m_X(t) = At + \frac{B}{\lambda q+\mu p}(1-e^{-(\lambda q+\mu p)t}).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αναν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:

$$
\begin{aligned}
& m_X(t) = F_X(t) + (F_X * m_X)(t) \\
\Rightarrow \quad & m_X(t) = 1 - pe^{-\lambda t} - qe^{-\mu t} \\
& \qquad + \int_0^t \left(1 - pe^{-\lambda(t-u)} - qe^{-\mu(t-u)}\right) m'_X(u)du \\
\Rightarrow \quad & \cdots
\end{aligned}
$$

Οριακά θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία

Πλαίσιο οριακών θεωρημάτων

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία,
- X_k, $k \geq 1$: ενδιάμεσοι χρόνοι,
- $F_X(t)$: κατανομή ενδιάμεσων χρόνων,
- $E[X_k] = \mu$, $Var[X_k] = \sigma^2$,
- $m_X(t)$: ανανεωτική συνάρτηση.

Νόμος Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ)

- Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό (μακροπρόθεσμη συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \text{ με πιθανότητα 1.}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

- Αν $\mu < \infty$ και $\sigma^2 \in (0, \infty)$, έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \Pr\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x), \ x \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (ΣΑΘ)

- Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό (μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα) ανανεώσεων έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_X(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, η οριακή λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$$

δίνεται ως

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

- Μια τεχνική προϋπόθεση αφορά την 'απεριοδικότητα' της συνάρτησης κατανομής $F_X(t)$.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Ορισμός

- X μη-αρνητική, γνήσια ($\Pr[X < \infty] = 1$.
- X περιοδική, αν υπάρχει $p > 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = kp] = 1$.
- Ο μεγαλύτερος τέτοιος p λέγεται περίοδος της X.
- X απεριοδική $\Leftrightarrow$ X όχι περιοδική.

Περιοδικότητα/Απεριοδικότητα τ.μ. - Παραδ.

- X συνεχής ή μεικτή $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- $X \sim \text{Bin}(n,p)$, $\text{Poisson}(\lambda)$, $\text{Geom}(p)$
  $\Rightarrow X$ περιοδική με $p=1$.
- X τ.μ. με
  $\Pr[X=0]=\frac{1}{3}$, $\Pr[X=\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$, $\Pr[X=\frac{1}{3}]=\frac{1}{6}$
  $\Rightarrow X$ περιοδική με $p=\frac{1}{6}$.
- X τ.μ. με
  $\Pr[X=0]=\frac{1}{3}$, $\Pr[X=\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$, $\Pr[X=\sqrt{2}]=\frac{1}{6}$
  $\Rightarrow X$ απεριοδική.
- X τ.μ. με τιμές $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
  $\Rightarrow X$ απεριοδική.

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

- $h(t)$: μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$με $d_i(t) \geq 0$,φθίνουσες,φραγμένες.
- $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$.
- Τότε:
  1. X απεριοδική με μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu}.$$

  2. X περιοδική με περίοδο p και μέση τιμή $\mu > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} h(tp+x) = \frac{p\sum_{t=0}^\infty d(tp+x)}{\mu} \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X

- Παίρνουμε όριο στη λύση της ανανεωτικής:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

- $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$, αφού $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$.Άρα:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t d(t-u)dm_X(u).$$

- Σπάμε το ολοκλήρωμα σε δυο κομμάτια $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ και $\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u)$.

ΒΑΘ - Ιδέα απόδειξης για συνεχή X (συνέχεια)

- Το κλειδί είναι η κατάλληλη επιλογή του ϵ ώστε
  1. το $\int_0^\epsilon d(t-u)dm_X(u)$ να τείνει στο 0, καθώς $t \to \infty$.

     (Εύλογο αφού για μικρά u (στο $[0,\epsilon]$) το $d(t-u)$ θα είναι κοντά στο 0, αφού $\lim_{t\to\infty} d(t) = 0$).
  2. για μεγάλα u (στο (ϵ, t)) η $m_X(u) \simeq \frac{u}{\mu}$ (ΣΑΘ),οπότε

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^t d(t-u)dm_X(u) &\simeq \frac{1}{\mu}\int_\epsilon^t d(t-u)du \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^{t-\epsilon} d(y)dy \to \frac{\int_0^\infty d(y)dy}{\mu},\end{aligned}$$

     καθώς $t \to \infty$.

Εφαρμογή: Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$

- Μας ενδιαφέρει η οριακή λύση, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$, για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ.

- Π.χ., αν $\{N(t)\}$ είναι η διαδικασία αφίξεων λεωφορείων σε μια στάση, το $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ είναι ο μέσος χρόνος μέχρι το επόμενο λεωφορείο.

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $F_X(t)$:
  - Συνεχής $\Rightarrow$ Απεριοδική.
- Προϋποθέσεις ΒΑΘ για $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$:
  1. $d(t) \geq 0$.
  2. $d(t)$ φθίνουσα.
  3. $d(t) \leq \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \mu < \infty$, $d(t)$ φραγμένη.
  4. $\int_0^\infty |d(u)|du < \infty$;

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |d(u)|du &= \int_0^\infty d(u)du \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty (1 - F_X(y))dydu \\
&= \int_0^\infty \int_u^\infty \int_y^\infty dF_X(x)dydu \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \int_0^y dudydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x ydydF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \frac{x^2}{2} dF_X(x) = \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$ (συνέχεια)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο. Τύπος οριακού μέσου υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης:

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\int_0^\infty d(u)du}{\mu} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

- Ερμηνεία:
  Σε κατάσταση 'ισορροπίας', ο αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος για το επόμενο γεγονός είναι $\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$.
- Ανανεωτικό παράδοξο:
  Για $\sigma > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] > \frac{\mu}{2}.$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$

- $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμ. χρόνους X_i.
- $X_i \sim F_X(t)$ συνεχής με σππ $f_X(t)$.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$.
- $m_X(t) = E[N(t)]$.
- ΣΑΘ: $m_X(t) \simeq \frac{t}{\mu}$, για μεγάλα t.
- $\lim_{t\to\infty} \left(m_X(t) - \frac{t}{\mu} \right) =;$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- $h(t) = m_X(t) - \frac{t}{\mu}$.
- $\lim_{t\to\infty} h(t)$;
- Ανανεωτική εξίσωση για την $m_X(t)$:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)dF_X(u).$$

- Αντικατάσταση της $h(t)$:

$$h(t) + \frac{t}{\mu} = F_X(t) + \int_0^t \left(h(t-u) + \frac{t-u}{\mu} \right) dF_X(u).$$

- Λύση ως προς $h(t)$ $\rightarrow$ Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\ &\quad + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= d(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u), \end{aligned}$$

με

$$d(t) = F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu}.$$

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Σκοπός: Έλεγχος προϋποθέσεων ΒΑΘ.
- Δυσκολία: Να γράψουμε $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, με $d_i(t) \geq 0$, φθίνουσες, φραγμένες.
- Τεχνική: Δουλεύουμε με την παράγωγο της $d(t)$.

Εφαρμογή: Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Παραγωγίζουμε την έκφραση της $d(t)$:

$$\begin{aligned} d(t) &= F_X(t) + \int_0^t \frac{t-u}{\mu} dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\ &= F_X(t) + \frac{t}{\mu} F_X(t) - \frac{1}{\mu} \int_0^t u dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \\ \Rightarrow \quad d'(t) &= f_X(t) + \frac{1}{\mu} F_X(t) + \frac{t}{\mu} f_X(t) - \frac{1}{\mu} t f_X(t) - \frac{1}{\mu} \\ &= \underbrace{f_X(t)}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{1}{\mu}(1 - F_X(t))}_{\geq 0} \\ \Rightarrow \quad d(t) &= \underbrace{F_X(t)}_{\text{αύξουσα}} - \underbrace{\frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F_X(u)) du}_{\text{αύξουσα}} . \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Προσθαφαιρούμε κατάλληλο όρο για να έχουμε διαφορά φθινουσών:

$$\begin{aligned} d(t) &= F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F_X(u))du \\ &= F_X(t) - 1 + 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F_X(u))du \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\mu - \int_0^t (1-F_X(u))du\right) - (1-F_X(t)) \\ &= \underbrace{\frac{1}{\mu}\int_t^\infty (1-F_X(u))du}_{d_1(t)} - \underbrace{(1-F_X(t))}_{d_2(t)}. \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{1}{\mu}\int_t^\infty (1-F_X(u))du, \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.} \\ d_2(t) &= 1-F_X(t), \quad \geq 0, \text{ φθιν., φραγμ.} \end{aligned}$$

- Θα δείξουμε ότι $\int_0^\infty |d(t)|dt < \infty$.
- Είναι

$$\int_0^\infty |d(t)|dt \leq \int_0^\infty d_1(t)dt + \int_0^\infty d_2(t)dt.$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d_1(t)dt &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_t^\infty (1-F_X(u))du\,dt \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_t^\infty\int_u^\infty dF_X(s)\,du\,dt \\
&\overset{0<t<u<s}{=} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^s\int_0^u dt\,du\,dF_X(s) \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty\int_0^s udu\,dF_X(s) \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \frac{s^2}{2}dF_X(s) \\
&= \frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}.
\end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- Επίσης

$$\int_0^\infty d_2(t)dt = \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt = \mu.$$

- Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |d(t)|dt &\leq \int_0^\infty d_1(t)dt + \int_0^\infty d_2(t)dt \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} + \mu < \infty. \end{aligned}$$

Πλάγια ασύμπτωτη της $m_X(t)$ (συν.)

- ΒΑΘ εφαρμόσιμο $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(m_X(t)-\frac{t}{\mu}\right) &= \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu}\\ &= \frac{\int_0^\infty d_1(t)dt-\int_0^\infty d_2(t)dt}{\mu}\\ &= \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}-1\\ &= \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}.\end{aligned}$$

- Η $m_X(t)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη $\frac{1}{\mu}t+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$.

Στοχαστική διαδικασία Poisson

Ανανεωτικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

$$\Updownarrow$$

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία
με $\mathrm{Exp}(\lambda)$ ενδιάμεσους χρόνους.

Ολικός/Μακροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

$$\Updownarrow$$

$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

1. ανεξάρτητες προσαυξήσεις,δηλαδή για κάθε $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες,
2. ομογενείς προσαυξήσεις,δηλαδή για κάθε $t, s > 0$, η κατανομή της $N(t+s) - N(s)$ δεν εξαρτάται από το s,
3. την κατανομή της $N(t)$ να είναι Poisson(λt),δηλαδή

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n \geq 0.$$

Τοπικός/Μικροσκοπικός ορισμός Poisson

- $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

$$\Updownarrow$$

$\{N(t)\}$ σημειακή διαδικασία με

1. ανεξάρτητες προσαυξήσεις,
2. ομογενείς προσαυξήσεις,
3. να ισχύει

$$\Pr[N(h)=n]=\begin{cases}1-\lambda h+o(h) & \text{αν } n=0,\\ \lambda h+o(h) & \text{αν } n=1,\\ o(h) & \text{αν } n\geq 2,\end{cases}$$

για $h\to 0^+$ (όπου $o(h)$ είναι μια συνάρτηση του h με $\lim_{h\to\ 0^+}\frac{o(h)}{h}=0$).

Υπέρθεση διαδικασιών Poisson

- $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$, ..., $\{N_r(t)\}$ ανεξ. διαδ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.
- $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους με $N(t) = \sum_{j=1}^{r} N_j(t)$.
- Τότε:
  1. $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$.
  2. Αν Z_k ο τύπος του k-οστού γεγονότος της υπέρθεσης, ($\{Z_k = i\}$ αν το k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από γεγονός της $\{N_i(t)\}$),τότε
     οι Z_k, $k \geq 1$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και

$$\Pr[Z_k = i] = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Διάσπαση διαδικασιών Poisson

- $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ.
- $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. ισόν. με τιμές στο $\{1, 2, \ldots, r\}$ και

$$\Pr[Z_k = i] = p_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

- Έστω $N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k=i\}}$, $t \geq 0$, $1 \leq i \leq r$.
- Οι $\{N_i(t)\}$, $1 \leq i \leq r$ συνιστούν μια τυχαία διάσπαση της $\{N(t)\}$.
- Τότε:
  Ο $\{N_i(t)\}$, $1 \leq i \leq r$ ανεξ. διαδικασίες Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς λp_i, $1 \leq i \leq r$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Διατύπωση

- $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson.
- $S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων.
- Τότε:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n | N(t) = n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}),$$

όπου $U_{i:n}$ η i-οστή διατεταγμένη από n ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $(0, t]$.

Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων - Χρησιμότητα

- Επιτρέπει υπολογισμούς δεσμευμένων πιθανοτήτων της μορφής $\Pr[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n]$, καθώς και δεσμευμένων μέσων τιμών της μορφής $E[g(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n]$:

$$\begin{aligned} & \Pr[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in A | N(t) = n] \\ = \; & \Pr[(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}) \in A], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E[g(S_1, S_2, \ldots, S_n) | N(t) = n] \\ = \; & E[g((U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}))]. \end{aligned}$$

Χρήσιμες υπενθυμίσεις διατεταγμένων τ.μ.

- Αν $(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξ. ομοιόμορφες στο $(0, t]$, τότε:

$$
\begin{aligned}
F_{U_{i:n}}(u) &= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}, \quad 0 < u \le t, \\
f_{U_{i:n}}(u) &= \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} \left(\frac{u}{t}\right)^{i-1} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-i}, \\
&\quad 0 < s_i \le t, \\
E[U_{i:n}] &= \frac{it}{n+1}, \quad 1 \le i \le n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
&\qquad = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n \le t, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Βασικά εργαλεία για στοχ. διαδ. Poisson

- Ορισμοί (3).
- Θεωρήματα υπέρθεσης και διάσπασης.
- Θεώρημα δεσμευμένης κατανομής χρόνων γεγονότων.

Άσκηση: Δεσμευμένη κατανομή του S_1

- $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ.
- $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων.
- $E[S_1|N(t) \geq 1]=;$

Άσκηση: Ντετερμινιστικές ή τυχαίες επιθεωρήσεις;

- Μηχάνημα με $\text{Exp}(\lambda)$ χρόνο ζωής.
- Μπορεί να επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε $\tau = \frac{1}{\mu}$ χρονικές μονάδες,
  1. είτε στις στιγμές $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ (α),
  2. είτε στις στιγμές μιας Poisson με ρυθμό μ (β).
- Y_α, Y_β: χρόνοι διάγνωσης βλάβης με τις διαδικασίες (α) και (β).
- $E[Y_\alpha]$, $E[Y_\beta]$=;
- Ποια διαδικασία επιθεωρήσεων είναι προτιμότερη·

Άσκηση: Μέσος χρόνος διάβασης

- Δρόμος με διάβαση πεζών.
- Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αυτοκίνητα το λεπτό.
- Ο δρόμος έχει πλάτος x μέτρα.
- Ένας πεζός που περπατάει με ταχύτητα u μέτρα το λεπτό, θέλει να διασχίσει τον δρόμο.
- Τον διασχίζει μόνο όταν βλέπει ότι δεν θα περάσουν αυτοκίνητα από τη διάβαση ενόσω θα την περνάει ο ίδιος.
- Μέσο χρόνος από την άφιξη πελάτη ως το πέρας της διάσχισης=;.

Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους

Ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους (συμβατή με την $\{N(t)\}$)

$$\Updownarrow$$

(X_n, C_n), $n \geq 1$ ανεξάρτητες τ.μ., όπου $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$.

- $F_{X,C}(x, y)$ σ.κ. των (X_n, C_n): γεννώσα συνάρτηση κατανομής της $\{C(t)\}$.

Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $Y_1, Y_2, \ldots$: ανεξ. ισον., ανεξ. της $\{N(t)\}$.
- $g(x, y)$: συνάρτηση.
- Η $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i), \ t \geq 0,$$

αναφέρεται ως αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους.

- Στο n-οστό γεγονός επάγεται κόστος $g(X_n, Y_n)$.

Ειδικές περιπτώσεις:

- $g(x,y) = 1 \Rightarrow C(t) = N(t)$ ανανεωτική διαδικασία.
- $g(x,y) = y \Rightarrow C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ σύνθετη ανανεωτική διαδικασία.
  Π.χ.
  1. $N(t)$: πλήθος ζημιών σε ασφαλιστική εταιρεία, Y_i: ύψος i-οστής ζημιάς.
  2. $N(t)$: πλήθος αφικνούμενων ομάδων σε σύστημα, Y_i: μέγεθος i-οστής ομάδας.
  3. $N(t)$: πλήθος παραγγελιών Y_i: μέγεθος i-οστής παραγγελίας.
- $g(x,y) = 1_{\{y>t\}}$.

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (ΣΑΘΚ)

- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους.
- (X, C): τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής.
- $F_{X,C}(x, y)$: κατανομή (X, C).
- Υποθέσεις: $E[X] < \infty$ και $E[C] < \infty$.
- Τότε:
  1. Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε
  $$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}, \text{ με πιθανότητα 1.}$$
  2. Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε
  $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Ντετερμινιστικό ανάλογο του ΣΑΘΚ

- $c(t)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο x.
- Τότε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t c(u)du}{t} = \frac{\int_0^x c(u)du}{x}.$$

Αναγεννητικές διαδικασίες

Αναγεννητικές διαδικασίες - Ορισμός

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία

$$\Updownarrow$$

$\exists\ S_1 \geq 0$ με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < \infty] = 1$:

1. οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες, και
2. $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.

- Διαισθητικά:
$\{X(t)\}$ αναγεννητική $\Leftrightarrow \exists\ S_1$ ώστε από το S_1 και μετά η εξέλιξή να είναι σαν να ξεκινούσε από το 0.

Ανανεωτική διαδικασία αναγεννητικών σημείων

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική
  $\Downarrow$
  $\exists\ S_1 \leq S_2 \leq \ldots$:
  1. $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες,
  2. $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.
- Τα $S_1, S_2, \ldots$ λέγονται αναγεννητικά σημεία.
- Η $\{N(t)\}$ με

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0,$$

είναι η ανανεωτική διαδικασία των αναγεννητικών σημείων.

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας Ι

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- Οριακή δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du}{t},\ x\in\mathbb{R},\ (\tau.\mu.)$$

(μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\}\le x$).

- Οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du\right]}{t},\ x\in\mathbb{R},\ (\text{αριθμός})$$

(μακροπρόθ. μέσο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\}\le x$).

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας II

- Οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x],\ x \in \mathbb{R},\ (\text{αριθμός}),$$

(πιθανότητα μια μακρινή χρονική στιγμή η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

- C-οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x]du}{t},\ x \in \mathbb{R},\ (\text{αριθμός})$$

(πιθανότητα μια χρονική στιγμή ομοιόμορφα επιλεγμένη σε μεγάλο διάστημα η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών I

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- S ο 1ος χρόνος αναγέννησης.
- Η τ.μ.

$$\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}} du$$

εκφράζει τον συνολικό χρόνο στο $(0, S]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x.

- Αν $E[S] < \infty$, ορίζουμε

$$F_X(x) \quad = \quad \frac{E[\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}} du]}{E[S]}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών II

- Τότε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du}{t} = F_X(x), \quad \text{με πιθανότητα 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du]}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u)\le x] du}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών III

- Αν, επιπλέον, η κατανομή του S είναι απεριοδική,δηλ. δεν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} \Pr[S = na] = 1$, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x] \quad = \quad F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Συνοπτικά:
  Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών:
  Όλες οι οριακές κατανομές μιας αναγεννητικής διαδικασίας είναι ίσες.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας I

- $\{X(t)\}$: αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστ. $\mathbb{R}$.
- $c(x)$: άνω ή κάτω φραγμένη συνάρτηση που εκφράζει το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση x.
- Συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στο $(0, t]$:

$$C(t) \quad = \quad \int_0^t c(X(u))du \text{ (τ.μ.)}.$$

- X τ.μ. με την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας II

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = E[c(X)], \text{ με πιθανότητα 1.} \tag{2}$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = E[c(X)]. \tag{3}$$

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας III

- Η μέση τιμή $E[c(X)]$ υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} E[c(X)] &= \frac{E[\int_0^S c(X(u))du]}{E[S]} = \frac{E[C(S)]}{E[S]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(x)dF_X(x) \\ &= \begin{cases} \sum_x c(x)f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(x)f_X(x)dx & \text{αν } X \text{ συνεχής,} \end{cases} \end{aligned}$$

  όπου S ο χρόνος 1ης αναγέννησης της $\{X(t)\}$.
- Αν η κατανομή του S απεριοδική:

$$E[c(X)] = \lim_{t\to\infty} E[c(X(t))].$$

Εφαρμογές ανανεωτικών διαδικασιών κόστους και αναγεννητικών διαδικασιών

Αντικατάσταση μηχανήματος I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \ldots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \ldots$ (down times).
- Αντικατάσταση όταν χαλάσει ή όταν περάσει χρόνος s.
- Κόστη ανά αντικατάσταση:
  c_f (για βλάβη - failure),
  c_p (προληπτικά - preventive maintenance).
- (O_n, D_n) ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x, y)$.
- $C(t)$: Κόστος για τις αντικαταστάσεις στο $(0, t]$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $=$;
- Βέλτιστο $s =$;

Αντικατάσταση μηχανήματος ΙΙ

- S_n: χρονική στιγμή ολοκλήρωσης n-οστής αντικατάστασης.
- Τότε:

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = \min(O_n, s) + D_n,\ n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = c_f 1_{\{O_n \leq s\}} + c_p 1_{\{O_n > s\}},\ n \geq 1. \end{aligned}$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισον.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος III

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[\min(O,s)] + E[D] \\ &= \int_0^\infty \Pr[\min(O,s) > t]dt + \int_0^\infty \Pr[D > t]dt \\ &= \int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt, \\ E[C] &= c_f \Pr[O_n \le s] + c_p \Pr[O_n > s] \\ &= c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s)), \end{aligned}$$

- Επομένως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s))}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος IV

- Κόστος ως συνάρτηση του s:

$$c(s) = \frac{c_p + (c_f - c_p)F_O(s)}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

- $\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt \uparrow s.$
- $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \uparrow s$, όταν $c_f > c_p$,
  $c_p + (c_f - c_p)F_O(s)$ σταθερή, όταν $c_f = c_p$,
  $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \downarrow s$, όταν $c_f < c_p$.
- $c_f \leq c_p$ (δεν συμβαίνει στις εφαρμογές) $\Rightarrow c(s) \downarrow s$.Τότε βέλτιστο ∞.
- $c_f > c_p$ (τυπικό στις εφαρμογές) $\Rightarrow$Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $c(s)$ κλπ.

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \ldots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \ldots$ (down times).
- (O_n, D_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x, y)$.
- Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής $=$;

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία II

- Αναγεννητικά σημεία: Σημεία επαναλειτ. μηχανής.
- S_n: χρόνος λήξης n-οστής αντικατάστασης.
- $C(t)$: χρόνος λειτουργίας της μηχανής στο $(0, t]$.
- Έχουμε:

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = O_n + D_n,\ n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O] + E[D]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων I

- $\{A(t)\}$: αναν. διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη.
- $Y_1, Y_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $E[Y_i] = \mu$.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης μόλις συγκεντρωθούν m προϊόντα.
- K: εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k: κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h: κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $=$;
- Βέλτιστο $m =$;

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- S_n: χρόνος n-οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.
- $Y_{n,i}$: ενδιάμεσος χρόνος της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i-οστού αντικειμένου που φθάνει στον n-οστο κύκλο (δηλαδή μεταξύ $n-1$-οστής και n-οστής εκκαθάρισης).

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων III

- Τότε:

$$X_n = \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i},\ n \geq 1,$$

$$C_n = K + mk + h \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j},\ n \geq 1.$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων IV

- Υπολογισμοί:

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right] = m\mu, \quad n \geq 1, \\
E[C_n] &= E\left[K + mk + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}\right] \\
&= K + mk + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu \\
&= K + mk + h\frac{(m-1)m}{2}\mu, \quad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του m:

$$
c(m) = \lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων V

- Συνεχής επέκταση της $c(m)$ και παράγωγοι:

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{\mu x} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{h}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{\mu x^3}, \end{aligned}$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}.$$

- Βέλτιστο m: $m^* = \lfloor x^* \rfloor$ ή $m^* = \lceil x^* \rceil$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο I

- $\{A(t)\}$: Poisson διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη με ρυθμό λ.
- $m = \frac{1}{\lambda}$: Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων αντικειμένων.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης κάθε x χρονικές μονάδες.
- K: εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k: κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h: κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους = ;
- Βέλτιστο x = ;

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- $S_n = nx$: χρόνος n-οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο III

- Τότε:

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = x,\ n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) \\ &= K + k(A(nx) - A((n-1)x)) \\ &\quad + h\int_0^x (A((n-1)x+u) - A((n-1)x)du,\ n \geq 1. \end{aligned}$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο IV

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
E[X_n] &= x, \quad n \geq 1, \\
E[C_n] &= K + kE[A(nx) - A((n-1)x)] \\
&\quad + h\int_0^x E[A((n-1)x+u) - A((n-1)x]du \\
&= K + k\lambda x + h\int_0^x \lambda u du \\
&= K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}, \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του x:

$$c(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}.$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο V

- Παραγώγιση της $c(x)$

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{x^3}. \end{aligned}$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}.$$

- Αναμενόμενος αριθμός συσσωρευμένων αντικειμένων:

$$\lambda x^* = \sqrt{2K\lambda/h} = \sqrt{2K/hm}.$$

Τύπος σε συμφωνία με το μοντέλο εκκαθάρισης

Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ορισμοί

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων $\sim F_X(x)$.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ερμηνείες

- Μαθηματικοί ορισμοί:

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- Ερμηνείες:
  - $A(t)$: ηλικία (παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης - age), χρόνος από το προηγούμενο γεγονός.
  - $R(t)$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης (προδρομικός χρόνος ανανέωσης - remaining renewal time ή residual renewal time), χρόνος ως το επόμενο γεγονός.
  - $T(t)$: t-εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος (ολικός - total renewal time), χρόνος από το προηγούμενο ως το επόμενο γεγονός.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Έχουμε δείξει ότι για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

$$\text{Ανανεωτική εξίσωση για } E[R(t)] + \text{ΒΑΘ}$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t},$$

που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Από αναγεννητικότητα της $\{R(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}.$$

- Ορίζουμε διαδικασία κόστους $C(t) = \int_0^t R(u)du$.
- Έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} \underset{=}{\Sigma\text{Α}\Theta\text{Κ}} \frac{E\left[\int_0^X R(u)du\right]}{E[X]}.$$

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E[R(t)] &= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X R(u)du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X (X-u)du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\frac{X^2}{2}\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E[X^2]}{2E[X]} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.
\end{aligned}$$

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

  Ανανεωτική εξίσωση για $\Pr[R(t) \leq x]$ + ΒΑΘ

  $$\Downarrow$$

  $$\lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) \leq x] = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u))du}{\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

  $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\leq x\}} du\right]}{t},$$

  που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) \le x] &= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{t} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\min(X,x)\right]}{E[X]} \\
&= \frac{\int_0^\infty \Pr[\min(X,x) > u] du}{E[X]} \\
&= \frac{\int_0^x \Pr[X > u] du}{E[X]} = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u)) du}{\mu}.
\end{aligned}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου

Ορισμός Μ.α.δ.χ.

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (Μ.α.δ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ αν
  1. $X_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
  2. $\Pr[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $n \geq 0$, $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
- Αν οι $\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$ δεν εξαρτώνται από το n, η Μ.α.δ.χ. λέγεται ομογενής.
  Τότε συμβολίζουμε:

$$p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.δ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.δ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.δ.χ. $\{X_n\}$ χρειαζόμαστε:
  1. Αρχική κατανομή:
  $$\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)}) \text{ με } \pi_i^{(0)} = \Pr[X_0 = i].$$
  2. Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (1ης τάξης):
  $$\mathbf{P} = (p_{ij}), \text{ με } p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε:
  1. Μεταβατική κατανομή:
  $$\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)}) \text{ με } \pi_i^{(n)} = \Pr[X_n = i].$$
  2. Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης m-ης τάξης):
  $$\mathbf{P} = (p_{ij}^{(m)}), \text{ με } p_{ij}^{(m)} = \Pr[X_{n+m} = j | X_n = i].$$

Πιθανότητα μονοπατιού Μ.α.δ.χ.

- Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συγκεκριμένου μονοπατιού $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$ είναι

$$\Pr[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = \pi^{(0)}_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

(από πολλαπλασιαστικό νόμο).

Πιθανότητες n-οστής τάξης Μ.α.δ.χ. Ι

- Οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \\
p_{ij}^{(1)} &= p_{ij}, \\
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1,
\end{aligned}
$$

(από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας).

Πιθανότητες n-οστής τάξης Μ.α.δ.χ. ΙΙ

- Οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης σε πινακική μορφή υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}^{(1)} &= \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^{(n)} &= \mathbf{P}^{(k)}\mathbf{P}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n, \ n \geq 0.$$

Μεταβατική κατανομή Μ.α.δ.χ.

- Οι μεταβατικές πιθανότητες υπολογίζονται από τη σχέση

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

(από Θεώρημα Ολικής πιθανότητας),που γράφεται σε πινακική μορφή ως

$$(\pi^{(n)})^T = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^{(n)} = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^n.$$

Μέσοι αριθμοί επισκέψεων Μ.α.δ.χ.

- Μέσος αριθμός επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα ξεκινώντας από την i:

$$m_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} | X_0 = i\right].$$

- Οι μέσοι αριθμοί επισκέψεων υπολογίζονται ως:

$$m_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}.$$

- Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{M}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k.$$

Επικοινωνία καταστάσεων - Κλάσεις

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα $\mathbf{P}$.
- $i \to j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists n \geq 0$: $p_{ij}^{(n)} > 0$ $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$: $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j} > 0$.
- $i \leftrightarrow j$ (i, j επικοινωνούν) $\Leftrightarrow i \to j$ και $j \to i$.
- Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας $\Rightarrow$ ο $\mathcal{X}$ διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις).
- Μια Μ.α.δ.χ. με μοναδική κλάση επικοινωνίας λέγεται αδιαχώριστη (όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν).
- Μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathcal{C}$ και $j \notin \mathcal{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή.

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i,και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_i &= 1,\ i \in \mathcal{C}, \\ x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} x_j,\ i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}}|X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} y_i &= 0,\ i \in \mathcal{C}, \\ y_i &= 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} y_j,\ i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Χρόνοι επανόδου σε κατάσταση

- Έστω $X_0 = j$.
- Ορίζουμε:

$$R_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\},$$

τον χρόνο επανόδου της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην j,

$$h_j = \Pr[R_j < \infty | X_0 = j],$$

την πιθανότητα επανόδου στην j,και

$$m_j = E[R_j | X_0 = j],$$

τον μέσο χρόνο επανόδου στην j.

Σύνδεση χρόνων 1ης εισόδου και επανόδου

- Για συγκεκριμένο j, θεωρούμε τη Μ.α.δ.χ. που προκύπτει αν τροποποιήσουμε την αρχική, κάνοντας την j απορροφητική.
- Για τη νέα Μ.α.δ.χ. υπολογίζουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$.
- Τότε:

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} h_i(\{j\}), \\ m_j &= 1 + \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} m_i(\{j\}). \end{aligned}$$

Επαναληπτικότητα - παροδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.
  1. j θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j < \infty$.
  2. j μηδενικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j = \infty$.
  3. j παροδική $\Leftrightarrow h_j < 1$.

Ιδιότητες επαναληπτικότητας - παροδικότητας

- Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας:
  $i \leftrightarrow j \Rightarrow i$ και j ίδιου τύπου.
- $\mathcal{C}$ ανοικτή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ παροδική.
- $\mathcal{C}$ πεπερασμένη κλειστή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ θετικά επαναληπτική.
- $\mathcal{C}$ άπειρη κλειστή κλάση $\Rightarrow$ ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα.

Περιοδικότητα - Απεριοδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$.

$$d_j = \text{ΜΚΔ}\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

1. j απεριοδική $\Leftrightarrow d_j = 1$.
2. j περιοδική με περίοδο $d_j \Leftrightarrow d_j > 1$.

- $p_{jj} > 0 \Rightarrow j$ απεριοδική $(\not\Leftarrow)$.
- Οι ιδιότητες απεριοδικότητας, περιοδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας:$i \leftrightarrow j \Rightarrow d_i = d_j$.

Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου

Κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j)$ κατανομή ισορροπίας της $\{X_n\}$

$$\Updownarrow$$

$\pi = (\pi_j)$ μη-αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}, \ j \in \mathcal{X},$$

που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. Ι

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\{X_n\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ $\{X_n\}$ έχει μια στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_j)$.
- Αν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική.
- Κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\pi$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. ΙΙ

- π_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}}{n} = \pi_j, \quad \text{με πιθανότητα 1}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η οριακή δειγματική ή οριακή εμπειρική κατανομή της $\{X_n\}$).

- π_j: μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}}]}{n} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

- π_j: αντίστροφος του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j:

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.δ.χ. ΙΙΙ

- π_j: C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \pi_j^{(k)}}{n} = \pi_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. απεριοδική, τότε π_j: οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

(π είναι η οριακή κατανομή της $\{X_n\}$).

- Αν η Μ.α.δ.χ. έχει αρχική κατανομή την π, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την π:

$$\pi^{(0)} = \pi \ \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi,\ n \geq 0.$$

(π είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$).

Υπολογισμοί με την κατανομή ισορροπίας

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα πιθανοτητών μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\pi = (\pi_j : j \in \mathcal{X})$ η κατανομή ισορροπίας της.
- Τότε:
  1. π_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου (βημάτων) που η $\{X_n\}$ περνάει στην j.
  2. $\pi_j p_{ji}$: μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων τύπου $j \to i$.
  3. $\frac{\pi_j}{\pi_i}$: μέσος αριθμός επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i.

ΣΑΘΚ $\Rightarrow$ Τύπος $\frac{\pi_j}{\pi_i}$

- $\{X_n\}$: Αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις επισκέψεις σε κάποια $i \in \mathcal{X}$.
- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία επισκέψεων στην i.
- $\{C(t)\}$: Διαδικασία κόστους με

$$C(t) = \text{πλήθος επισκέψεων στην } j \text{ στο } [(0,t].$$

- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}}_{\pi_j} = \frac{E[C]}{E[X]},$$

με
$E[C]$: μέσο αριθμό επισκέψεων στην j μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i,
$E[X] = m_i = \frac{1}{\pi_i}$.

- Άρα $E[C] = \frac{\pi_j}{\pi_i}$.

Ερμηνεία εξισώσεων ισορροπίας

- Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση j:

$$\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}.$$

- $\pi_j \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από την j προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς την j από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση ισορροπίας: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς την j είναι ίσα.

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

- Ίδια ιδέα με εξισώσεις ισορροπίας, αλλά αντί για κατάσταση j έχουμε σύνολο A.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς το $\mathcal{A}$ είναι ίσα.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} \pi_j p_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από το A προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} \pi_i p_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς το A από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για το σύνολο A:

$$\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} \pi_i p_{ij}.$$

Κατανομή ισορροπίας Μ.α.δ.χ. γέννησης-θανάτου

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. τύπου γέννησης θανάτου

$$\Updownarrow$$

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i+1, \\ r_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i, \\ q_i & \text{αν } i = 1, 2, 3, \ldots, \quad j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Εξισώσεις γενικ. ισορ. για $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, i-1\}$, $i \geq 1$ $\Rightarrow \pi_{i-1} p_{i-1} = \pi_i q_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$
- Άρα

$$\pi_i = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad i \geq 1.$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου με κόστη

Δομές κόστους

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
  1. $c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους παραμονής
     $c(j)$: κόστος μιας επίσκεψης (δηλαδή, χρονικής μονάδας παραμονής) στην j της $\{X_n\}$.
  2. $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους μετάβασης
     $d(i, j)$: κόστος μιας μετάβασης $i \to j$ της $\{X_n\}$.

Ρυθμοί κόστους

- Κόστος μέχρι την n-οστή μετάβαση:

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1}(c(X_k) + d(X_k, X_{k+1})),\ n \geq 0,$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n}.$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[C(n)]}{n}.$$

Υπολογισμός ρυθμού κόστους

- $\{X_n\}$ αδιαχώριστη με στάσιμη κατανομή (π_j) και

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j \left(|c_j| + \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{jk}|d(j,k)| \right) < \infty$$

$\Rightarrow$

1. Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n)}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθ. 1.}$$

2. Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[C(n)]}{n} = \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{S}} \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_j p_{jk} d(j,k).$$

Αιτιολόγηση

- Αναγεννητικός κύκλος: Το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην i.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$
  Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους $= \frac{E[C]}{E[X]}$,
  $E[C]$: Μέσο κόστος σε έναν κύκλο,
  $E[X]$: Μέση διάρκεια κύκλου.
- $$E[X] = \frac{1}{\pi_i}.$$
- $$E[C] = \sum_j \frac{\pi_j}{\pi_i} c(i) + \sum_j \sum_k \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{jk} d(j,k).$$

  διότι $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων στην j σε έναν κύκλο.

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε ημέρας.
- Καταστάσεις μηχανής: 0 (άριστη), $1, 2, \ldots$ (μεγάλη τιμή $\rightarrow$ κακή κατάσταση).
- Μετά από κάθε επιθεώρηση, ο διαχειριστής αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει τη μηχανή με καινούργια ή όχι.
- $b(i)$: κόστος λειτουργ. μηχανής κατάστασης i. $(b(i) \uparrow)$.
- r: επιπλέον κόστος αντικατάστασης.
- Αντικατάσταση $\Rightarrow$ Κατάσταση 0 την επόμενη μέρα.
- Όχι αντικατάσταση $\Rightarrow$ Πιθανότητα εξέλιξης κατάστασης μηχανής $i \rightarrow j$: $g_i(j)$, για $j \geq i$.
- T_i τ.μ. κατάστασης επόμενης μέρας, αν η τρέχουσα κατάστασή της είναι i.
- Συνήθης υπόθεση: T_i στοχαστικά αύξουσα ως προς i.

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Πολιτικές & Μοντελοποίηση

- Ο διαχειριστής ακολουθεί μια πολιτική κατωφλίου για την αντικατάσταση:
  Αντικατάσταση $\Leftrightarrow$ Κατάσταση μηχανής$\geq n$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους υπό αυτή την πολιτική=;
- Κατάσταση μηχανής υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι $n \to$ Μ.α.δ.χ. με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} g_i(j) & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j \geq i, \\ 1 & \text{αν } i \geq n, \quad j = 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Κατανομή ισορροπίας & Εξισώσεις

- Εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή $\pi(n) = (\pi_j(n))$:

$$\begin{aligned}
\pi_0(n) &= g_0(0)\pi_0(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i(n), \\
\pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{j} g_i(j)\pi_i(n), \quad 1 \le j \le n-1, \\
\pi_j(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} g_i(j)\pi_i(n), \quad j \ge n.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Δομή και ρυθμός κόστους

- Δομή κόστους παραμονής: $c(i) = b(i)$, $i \geq 0$.
- Δομή κόστους μετάβασης:$d(i,j)$ με $d(i,0) = r$ για $i \geq n$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) c(j) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_j(n) p_{jk} d(j,k) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(n) b(j) + \sum_{j=n}^{\infty} r \pi_j(n). \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Ειδική περίπτωση

- $b(i) = 1 - b^i$, όπου $b \in (0, 1)$.
- $g_i(i) = 1 - \alpha$,
  $g_i(i+1) = \alpha$, και
  $g_i(j) = 0$, για $j \neq i, i+1$.
- Τότε (υπό την πολιτική κατωφλίου) $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i, \\ \alpha & \text{αν } 0 \leq i \leq n-1, \quad j = i+1, \\ 1 & \text{αν } i = n, \quad j = 0. \end{cases}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης I

- Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
\pi_0(n) &= \pi_n(n) + (1-\alpha)\pi_0(n), \\
\pi_j(n) &= \alpha\pi_{j-1}(n) + (1-\alpha)\pi_j(n), \quad 1 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \alpha\pi_{n-1}(n).
\end{aligned}$$

- Λύση:

$$\begin{aligned}
\pi_j(n) &= \frac{1}{n+\alpha}, \quad 0 \le j \le n-1, \\
\pi_n(n) &= \frac{\alpha}{n+\alpha}.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή: Συντήρηση-Αντικατάσταση μηχανήματος - Λύση ειδικής περίπτωσης II

- Δομή κόστους:
  Κόστος παραμονής: $c(i) = 1 - b^i$, $0 \leq i \leq n$.
  Κόστος μετάβασης:$d(i,j)$ με $d(n,0) = r$ και $d(i,j) = 0$, διαφορετικά.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμού κόστους, $g(n)$, υπό την πολιτική κατωφλίου με κατώφλι n:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+\alpha}(1-b^j) + \frac{\alpha}{n+\alpha}(1-b^n) + \frac{\alpha}{n+\alpha} r \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+n}(r-1) + 1 + \frac{1-b^n}{n+a}\left(\alpha - \frac{1}{1-b}\right). \end{aligned}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου

Ορισμός Μ.α.σ.χ.

- $\{X(t)\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου (Μ.α.σ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ αν
  1. $X(t) \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
  2. $\Pr[X(t+s) = j | X(u), 0 \leq u < s, X(s) = i] = \Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$, $t, s \geq 0$, $i, j \in \mathcal{X}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
  3. Αν οι $\Pr[X(t+s) = j | X(s) = i]$ δεν εξαρτώνται από το t, η Μ.α.σ.χ. λέγεται ομογενής.
     Τότε συμβολίζουμε:
     $$p_{ij}(t) = \Pr[X(s+t) = j | X(s) = i].$$
  4. Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.σ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.σ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.σ.χ. $\{X(t)\}$ χρειαζόμαστε:

  1. Αρχική κατανομή:

$$\mathbf{p}(0) = (p_i(0)), \text{ με } p_i(0) = \Pr[X(0) = i].$$

  2. Πίνακα ρυθμών μετάβασης:

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}), \text{ με}$$

$$\begin{aligned} q_{ij} &= = p'_{ij}(0) \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad i,j \in \mathcal{X} \text{ με } i \neq j, \\ q_{ii} &= -q_i = p'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{p_{ii}(h)-1}{h}, \quad i \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

(q_{ij}: ρυθμός $i \to j$, q_i: ρυθμός εξόδου από την i)

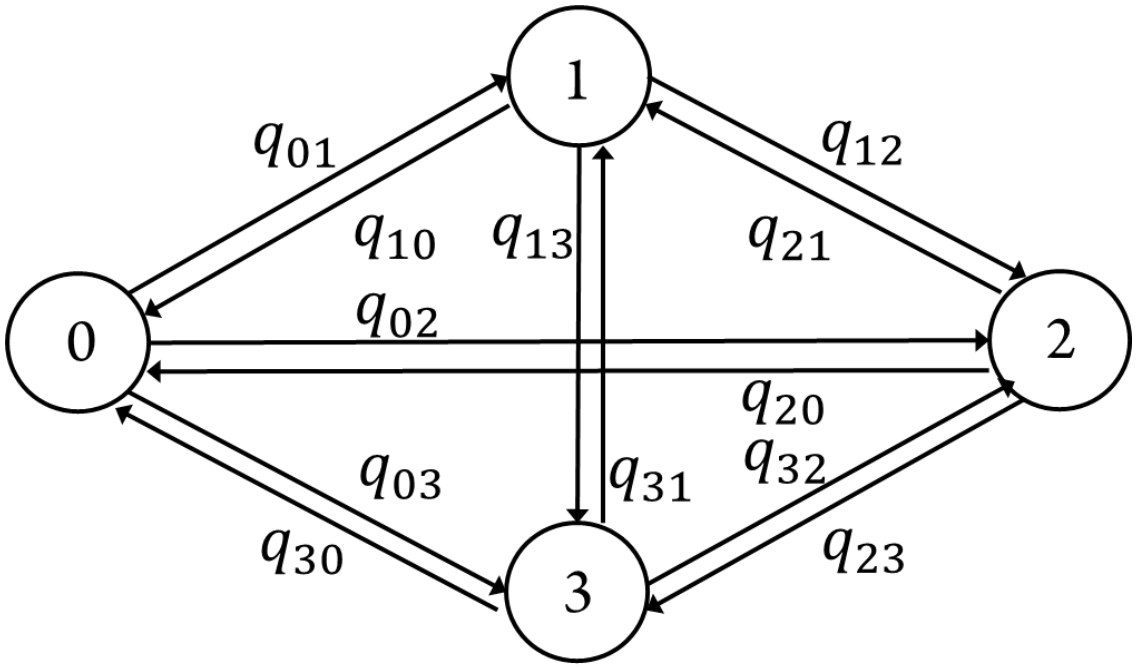
Πίνακας ρυθμών μετάβασης

- Γενική μορφή:

$$\mathbf{Q} = \left(p'_{ij}(0)\right) = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Μη-αρνητικά στοιχεία εκτός διαγωνίου.
- Μη-θετικά διαγώνια στοιχεία.

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης - Παράδειγμα



Σχήμα: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3\}$.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. Ι

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- Χρόνος παραμονής T_i σε μια κατάσταση i πριν από κάποια μετάβαση σε κατάσταση $j \neq i$ είναι εκθετικός με παράμετρο q_i.
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned} \Pr[T_i > t+h | T_i > t] &= \Pr[X(t+h) = i | X(t) = i] + o(h) \\ &= p_{ii}(h) + o(h) = 1 - q_i h + o(h), \\ &\qquad h \to 0^+ \end{aligned}$$

δεν εξαρτάται από το t, οπότε η T_i έχει την αμνήμονη ιδιότητα και άρα έχει εκθετική κατανομή.

Χρόνοι παραμονής στις καταστάσεις Μ.α.σ.χ. ΙΙ

- $F_{T_i}(t)$: σ.κ., $f_{T_i}(t) = F'_{T_i}(t)$ σ.π.π. της T_i. Τότε:

$$\Pr[t < T_i \le t+h | T_i > t] = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Pr[t < T_i \le t+h]}{\Pr[T_i > t]} = q_i h + o(h), \quad h \to 0^+$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \le t+h]}{h \Pr[T_i > t]} = q_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f_{T_i}(t)}{1 - F_{T_i}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}(1 - F_{T_i}(t))}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\log(1 - F_{T_i}(t))) = -q_i$$

- Άρα $F_{T_i}(t) = 1 - e^{-q_i t}$, $t \ge 0$, δηλαδή η T_i είναι $\mathrm{Exp}(q_i)$.

Πιθανότητες μετάβασης Μ.α.σ.χ.

- Όταν η $\{X(t)\}$ φύγει από κάποια κατάσταση i, η επόμενη κατάσταση θα είναι η $j \neq i$ με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Αιτιολόγηση:

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0^+} \Pr[X(t+h) = j | X(t) = i, X(t+h) \neq i] \\
= & \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(t) = i, X(t+h) = j]}{\Pr[X(t) = i, X(t+h) \neq i]} \\
= & \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(t+h) = j | X(t) = i]}{\Pr[X(t+h) \neq i | X(t) = i]} \\
= & \lim_{h\to 0^+} \frac{q_{ij}h + o(h)}{q_i h + o(h)} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \neq i.
\end{aligned}$$

Άλλοι ορισμοί Μ.α.σ.χ.

- Εναλλακτικός ορισμός Ι:
  $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. $\Leftrightarrow$
  Όντας σε μια κατάσταση i
  1. παραμένει εκεί για χρόνο $\text{Exp}(q_i)$,
  2. η επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Εναλλακτικός ορισμός ΙΙ:
  $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. $\Leftrightarrow$
  Όντας σε μια κατάσταση i
  1. υπάρχουν χρόνοι T_{ik} για $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$, όπου ο χρόνος T_{ik} έχει την κατανομή $\text{Exp}(q_{ik})$, $k \in \mathcal{X} \setminus \{i\}$,
  2. ο χρόνος της επόμενης μετάβασης είναι $\min_k T_{ik}$ και η κατάσταση j στην οποία πηγαίνει η $\{X(t)\}$ είναι αυτή για την οποία $T_{ij} = \min_k T_{ik}$.

Σχέση πίνακα ρυθμών και πιθανοτήτων μετάβασης

- Οι πιθανότητες μετάβασης είναι η λύση του συστήματος (προδρομικών) εξισώσεων Chapman - Kolmogorov:

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \delta_{ij}, \\ p'_{ij}(t) &= -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj},\ t \geq 0. \end{aligned}$$

- Σε πινακική μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\ t \geq 0. \end{aligned}$$

- Άρα:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \frac{t^n}{n!},\ t \geq 0.$$

Επικοινωνία, περιοδικότητα, επαναληπτικότητα

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών $\mathbf{Q}$.
- $i \to j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists t \geq 0$: $p_{ij}(t) > 0$ $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$: $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \ldots q_{i_{n-1} j} > 0$.
- Η περιοδικότητα δεν υπάρχει σαν έννοια λόγω του συνεχούς χρόνου.
- Η επικοινωνία, η επαναληπτικότητα (θετική και μηδενική) και η παροδικότητα ανάλογα με τον διακριτό χρόνο (ορισμοί και αποτελέσματα).

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i, και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X(0) = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_i &= 1,\ i \in \mathcal{C}, \\ x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j,\ i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}}|X(0) = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} y_i &= 0,\ i \in \mathcal{C}, \\ y_i &= \frac{1}{q_i} + \sum_{j \in \mathcal{S}} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j,\ i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Οριακή συμπεριφορά αδιαχώριστων Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου

Κατανομή ισορροπίας

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $p = (p_j)$ κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{p} = (p_j)$ μη-αρνητική λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \; j \in \mathcal{X},$$

που ικανοποιεί και την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p_j = 1.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. Ι

- $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\{X(t)\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ $\{X(t)\}$ έχει μια στάσιμη κατανομή $\mathbf{p} = (p_j)$.
- Αν υπάρχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι μοναδική.
- Κάθε άλλη λύση $\mathbf{x} = (x_j)$ του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας είναι πολλαπλάσιό της: $\mathbf{x} = c\mathbf{p}$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. ΙΙ

- p_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du}{t} = p_j, \quad \text{με πιθανότητα 1}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

($\mathbf{p}$ οριακή δειγματική κατανομή της $\{X(t)\}$).

- p_j: μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η Μαρκοβιανή αλυσίδα περνάει στην κατάσταση j:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du]}{t} = p_j, \quad j \in \mathcal{X}.$$

- p_j: αντίστροφος του γινομένου του μέσου χρόνου επανόδου στην κατάσταση j με τον ρυθμό εξόδου q_j:

$$p_j = \frac{1}{q_j m_j}, \quad j \in \mathcal{X}.$$

Εργοδικό Θεώρημα Μ.α.σ.χ. ΙΙΙ

- p_j: C-οριακή πιθανότητα (Cesaro οριακή πιθανότητα) της κατάστασης j:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_j(u)du}{t} = p_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

($\mathbf{p}$ είναι η C-οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$).

- p_j: οριακή πιθανότητα της κατάστασης j:

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j,\ j \in \mathcal{X}.$$

($\mathbf{p}$ είναι η οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$).

- Αν η Μ.α.σ.χ. έχει αρχική κατανομή την $\mathbf{p}$, τότε κάθε μεταβατική κατανομή της δίνεται πάλι από την $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p} \ \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p},\ t \geq 0.$$

($\mathbf{p}$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X(t)\}$).

Υπολογισμοί με την κατανομή ισορροπίας

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ., αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
- $\mathbf{p} = (p_j : j \in \mathcal{X})$ η κατανομή ισορροπίας της.
- Τότε:
  1. p_j: μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει στην j.
  2. $p_j q_{ji}$: μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων τύπου $j \to i$.
  3. q_{ji}: μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων προς την i, ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j.

Αιτιολογήσεις

- Εργοδικό θεώρημα Μ.α.σ.χ. $\Rightarrow$
  p_j= μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X(t)\}$ περνάει στην j.

- Ο μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων $j \to i$ υπολογίζεται με το ΣΑΘΚ.
- $\{X(t)\}$: Αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις επισκέψεις στην $j \in \mathcal{X}$.
- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία επισκέψεων στην j.
- $\{C(t)\}$: Διαδικασία κόστους με

$$C(t) = \text{πλήθος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } [(0, t].$$

Αιτιολογήσεις (συνέχεια)

- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}}_{\text{Ρυθμός μεταβ. } j\to i} = \frac{E[C]}{E[X]},$$

με
$E[C] = p_{ji} = \frac{q_{ji}}{q_j}$: μέσο αριθμό μεταβάσεων $j \to i$ μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην j,
$E[X] = m_j = \frac{1}{q_j p_j}$: μέσο χρόνο επανόδου στην j.

- Άρα:

$$\text{Ρυθμός μεταβ. } j \to i = \frac{\frac{q_{ji}}{q_j}}{\frac{1}{q_j p_j}} = p_j q_{ji}.$$

Αιτιολογήσεις (συνέχεια)

- Τέλος, για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό μεταβάσεων προς την i, ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j:

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to\infty} \frac{\text{Πλήθος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } (0,t]}{\text{Χρόνος παραμονής στην } j \text{ στο } (0,t]} \\ = & \frac{\lim_{t\to\infty}(\text{Πλήθος μεταβάσεων } j \to i \text{ στο } (0,t])/t}{\lim_{t\to\infty}(\text{Χρόνος παραμονής στην } j \text{ στο } (0,t])/t} \\ = & \frac{p_j q_{ji}}{p_j} = q_{ji}. \end{aligned}$$

Ερμηνεία εξισώσεων ισορροπίας

- Εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση j:

$$p_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}.$$

- $p_j \sum_{i \neq j} q_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από την j προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς την j από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση ισορροπίας: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς την j είναι ίσα.

Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

- Ίδια ιδέα με εξισώσεις ισορροπίας, αλλά αντί για κατάσταση j έχουμε σύνολο A.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για σύνολο καταστάσεων $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$: Τα δυο μακροπρόθεσμα ποσοστά μεταβάσεων, από και προς το $\mathcal{A}$ είναι ίσα.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_j q_{ji}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων από το A προς άλλες καταστάσεις.
- $\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_i q_{ij}$: Μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων προς το A από άλλες καταστάσεις.
- Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας για το σύνολο A:

$$\sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_j q_{ji} = \sum_{j\in\mathcal{A}} \sum_{i\in\mathcal{A}^c} p_i q_{ij}.$$

Μ.α.σ.χ. γέννησης-θανάτου

- $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. τύπου γέννησης θανάτου $\Leftrightarrow$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{αν } i = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = i+1, \\ \mu_i & \text{αν } i = 1, 2, 3, \ldots, \quad j = i-1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- Εξισώσεις γενικ. ισορ. για $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, i-1\}$, $i \geq 1$ $\Rightarrow p_{i-1}\lambda_{i-1} = p_i\mu_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$
- Άρα

$$p_i = p_0 \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_i}, \quad i \geq 1.$$

- Εξίσωση κανονικοποίησης $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \Rightarrow$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_i}\right)^{-1}.$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου με κόστη

Δομές κόστους

- $\{X(t) : t \geq 0\}$ Μ.α.σ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.
  1. $c : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους παραμονής
     $c(j)$: κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής στην j της $\{X(t)\}$.
  2. $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$: δομή (συνάρτηση) κόστους μετάβασης
     $d(i, j)$: κόστος μιας μετάβασης $i \to j$ της $\{X(t)\}$.

Ρυθμοί κόστους

- Κόστος μέχρι την χρονική στιγμή t:

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du + \sum_{k=0}^{N(t)} d(X_k, X_{k+1}),\ t \geq 0,$$

$X_0 = X(0)$,
$\{N(t)\}$ η απαριθμήτρια μεταβάσεων της $\{X(t)\}$,
$\{X_n\}$ η Μ.α.δ.χ. των μεταβάσεων της $\{X(t)\}$.

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t}.$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t}.$$

Υπολογισμός ρυθμού κόστους

- $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη με στάσιμη κατανομή (p_j) και

$$\sum_{j\in\mathcal{X}} p_j \left(|c_j| + \sum_{k\neq j} q_{jk}|d(j,k)| \right) < \infty.$$

$\Rightarrow$

1. Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \sum_{j\in\mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{X}} \sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k), \quad \text{με πιθ. 1.}$$

2. Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \sum_{j\in\mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{X}} \sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k).$$

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Περιγραφή

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ.
- $\text{Exp}(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης.
- ∞ χωρητικότητα.
- FCFS πειθαρχία ουράς.
- r: κέρδος ανά εξυπηρετούμενο πελάτη.
- c: κόστος ανά χρονική μονάδα για κάθε πελάτη.
- q: μεταβλητή απόφασης $\rightarrow$ πιθανότητα αποδοχής πελάτη.
- $b(q)$: αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση $\rightarrow$ μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους.

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους:

$$b(q) = \sum_{j\in\mathcal{X}} p_j c(j) + \sum_{j\in\mathcal{X}}\sum_{k\neq j} p_j q_{jk} d(j,k),$$

με

$$c(j) = -cj, \quad d(j,k) = \begin{cases} r & j = 0,1,2,\ldots, \quad k = j+1, \\ 0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

και (p_j) την κατανομή ισορροπίας:

$$p_j = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0, \quad \text{με } \rho = \frac{\lambda q}{\mu},$$

(όταν το σύστημα είναι ευσταθές ($\rho < 1$).

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση (συνέχεια)

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους:

$$\begin{aligned} b(q) &= -\sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j cj + \sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j \lambda q r \\ &= -c\frac{\lambda q}{\mu - \lambda q} + \lambda q r, \\ b'(q) &= -\frac{c\lambda\mu}{(\mu-\lambda q)^2} + \lambda r, \\ b''(q) &= = \frac{-2c\lambda^2\mu}{(\mu-\lambda q)^3} < 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Αποδοχή πελατών στην M/M/1 ουρά - Λύση (συνέχεια)

- $b(q)$ κοίλη.

$$b'(q) = -\frac{c\lambda\mu}{(\mu - \lambda q)^2} + \lambda r = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad q = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}\right) \overset{\text{ορσ}}{=} q^*.$$

- Βέλτιστη πιθανότητα αποδοχής:

$$q_{soc} = \begin{cases} 0 & \text{αν } q^* \leq 0, \\ q^* & \text{αν } q^* \in (0,1), \\ 1 & \text{αν } q^* \geq 1. \end{cases}$$