

Μακροβίανες Αλυσίδες Συνέχους Χρόνου (Μ.α.σ.χ)

① Ορισμός:

$\{X(t): t \geq 0\}$ στοχ. διαδ. τότε $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ:
 $\Leftrightarrow$ i) ο χώρος καταστάσεων είναι αριθμητικός δηλ:

$$\exists S \text{ αριθμ. ε.ω } \Pr[X(t) \in S] = 1 \quad \forall t$$

$$\text{ii) } \Pr[\underbrace{X(t+s)=j}_{\text{μελλον}} \mid \underbrace{X(u): 0 \leq u < t}_{\text{παρελθον}}, \underbrace{X(t)=i}_{\text{νοηον}}]$$

$$= \Pr[X(t+s)=j \mid X(t)=i] \quad \forall t, s \geq 0, i, j \in S$$

$$= P_{ij}(t, t+s)$$

- Αν $P_{ij}(t, t+s)$ ανεξ. του t ($= P_{ij}(s)$) λέγεται ομογενής Μ.α.σ.χ. Από εδώ και πέρα
 ∇ Μ.α.σ.χ $\equiv$ ομογενής Μ.α.σ.χ ∇

② Βασικά στοιχεία προσδιορισμού συμπιερισμού Μ.α.σ.χ

▷ Προς υπολογισμό:

$$P_j(t) = \Pr[X(t)=j], j \in S$$

$$\underline{p}(t) = (p_j(t): j \in S): \text{μεταβατική κατανομή εν στιγμή } t$$

Θέλω να υπολογίσω:

$$\bullet p_{ij}(t) = \Pr[X(t)=j \mid X(0)=i], i, j \in S$$

- $P(t) = (p_{ij}(t)) : i, j \in S$: πίνακας πιθαν. μεταβ. σε χρόνο t

Απαιτούν:

- ▷ $p_j(0) = \Pr[X(0) = j], j \in S$
- ▷ $p(0) = (p_j(0)) : j \in S$: αρχική κατανομή
- ▷ $q_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$ Ρυθμός μεταβ. $i \rightarrow j$
- ▷ $Q = (q_{ij})$: πίνακας ρυθμών μεταβ. ($P'(0)$)

③ Βασικοί υπολογισμοί

$$q_{ij} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, & j \neq i \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h) - 1}{h}, & j = i \end{cases}$$

Αρα:

Q έχει μη-δetr. στοιχεία στην διαγ. μη-αρν. — 11 — εκτός διαγ.

Ορίζω: $q_i = -q_{ii}, i \in S = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$Q = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} & \dots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & q_{13} & \dots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -q_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Στόχος: $p(0), Q \xrightarrow{?} p(t), P(t)$

Έχουμε ότι:

- $p_{ij}(h) = q_{ij} \cdot h + o(h), h \rightarrow 0^+, j \neq i$
- $p_{ii}(h) = \frac{1 + q_{ii} \cdot h + o(h)}{1 - q_i \cdot h}, h \rightarrow 0^+$

Διαφ. Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Εξετάζω την εξέλιξη της $\{X(t)\}$ στο

$[0, t] \cup [t, t+h]$. Άρα:

$$\Pr[X(t+h)=j | X(0)=i]$$

$$\stackrel{\text{Μαρκ}}{=} \sum_{\substack{k \in S \\ X(t)=k}} \underbrace{\Pr[X(t)=k | X(0)=i]}_{p_{ik}(t)} \underbrace{\Pr[X(t+h)=j | X(t)=k]}_{p_{kj}(h)} \quad \downarrow \text{Μαρκ}$$

Άρα να προκύψει:

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h)$$

$$= p_{ij}(t) \cdot p_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) p_{kj}(h)$$

$$= p_{ij}(t) \cdot (1 - q_{jj}h) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} \cdot h + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -p_{ij}(t) q_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(h)}{h}$$

$$\stackrel{h \rightarrow 0^+}{\Rightarrow} p'_{ij}(t) = \underbrace{-p_{ij}(t) q_{jj}}_{q_{ji}} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj}$$

$$\Rightarrow P'(t) = P(t) \cdot Q \quad (X'(t) = X(t) \cdot a)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = e^{Qt}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k t^k}{k!}$$

Τώρα έχουμε:

$$p_j(t) = \Pr[X(t)=j]$$

$$= \sum_{i \in S} \Pr[X(0)=i] \Pr[X(t)=j | X(0)=i]$$

$$= \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(t)^T = p(0)^T \cdot P(t) = p(0)^T e^{Qt}}$$

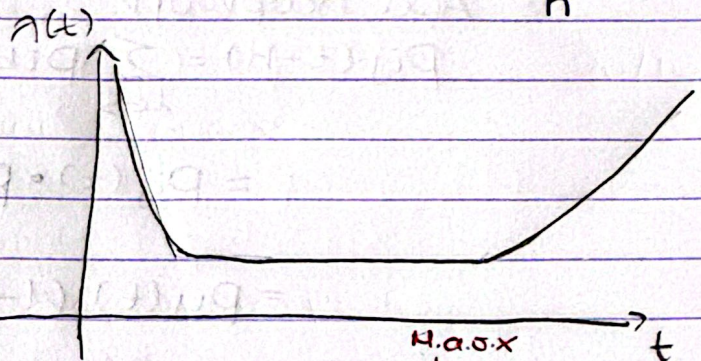
4) Κατανόηση χρόνου παραμονής Μ.α.δ.χ σε κατάσταση / Πιθανότητες μεταβάσεως από κατάσταση σε κατάσταση

Έστω $X(0) = i$

T_i : χρόνος παραμονής στην κατάσταση i

Ρυθμός βλαβής /

Βαθμός αντοχής: $\lambda_{Ti}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \leq t+h | T_i > t]}{h}$
μη-αρ. τυχ. μετ



Example:

$$\lambda_{Ti}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[X(t+h) \neq i | X(u) = i, 0 \leq u < t, X(t) = i]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h) + o(h)}{h} = -q_{ii} = q_i$$

Επίσης: $\lambda_{Ti}(t)$ σ.π.π

$$\lambda_{Ti}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[t < T_i \leq t+h, T_i > t]}{h(\Pr[T_i > t])} = 1 - F_{Ti}(t)$$

$$= -\frac{(1 - F_{Ti}(t))'}{1 - F_{Ti}(t)}$$

Αρα: $-\frac{(1 - F_{Ti}(t))'}{1 - F_{Ti}(t)} = q_i$

$$\Leftrightarrow \log(1 - F_{Ti}(t)) - \log(1 - F_{Ti}(0)) = -q_i t$$

$$\Leftrightarrow F_{Ti}(t) = 1 - e^{-q_i t}, t \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_i \sim \text{Exp}(q_i)}$$

Εστω $X(0)=i$

Ποια η πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι j ; ($j \neq i$)

$$p_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i, X(t+h) \neq i]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[X(t+h)=j, X(t)=i, X(t+h) \neq i]}{\Pr[X(t)=i, X(t+h) \neq i]}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[X(t)=i] \cdot p_{ij}(h)}{\Pr[X(t)=i] \Pr[X(t+h) \neq i \mid X(t)=i]}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{1 - p_{ii}(h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)/h}{(1 - p_{ii}(h))/h} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}}$$

⑤ Εναλλακτικός Ορισμός Μ.α.σ.χ

Εστω $\{X(t)\}$ στοχ. Διαδ. και σε κάθε κατάσταση i ο χρόνος παραμονής T_i είναι $\text{Exp}(q_i)$ και η επόμενη κατάσταση επιλέγεται με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$

Τότε:

Η $\{X(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ με ρυθμό μεταβολής

$$Q = (q_{ij})$$

⑥ 2 ιδιότητες της Exp

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ με $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i) \therefore$

Τότε:

$$\forall i=1, \dots, n$$

i) $\min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$

ii) $\Pr[X_j = \min(X_1, \dots, X_n)] = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$

⊕ Εναλλακτικός Ορισμός Μ.α.σ.χ (Ξανά)

Έστω $\{X(t)\}$ στοχ. διαδ. με αριθμησιφό X και S .
Δεδομένου ότι $X(t) = i$ υπάρχουν

$T_{ik} \sim \text{Exp}(q_{ik})$ με $k \neq i$ και η $\{X(t)\}$ θα
φύγει προς άλλη κατάσταση σε χρόνο
 $\min_{k \neq i} T_{ik}$ προς την κατάσταση που υφίσταται
 $k \neq i$ το $\min$. Τότε:

$\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ με πιν Q

20/10

Οριστική Θεωρία Μ.α.σ.χ

Θυμίζω!

① Ορισμοί

$\{X(t) : t \geq 0\}$ με X αριθμησιφό S .

Μ.α.σ.χ με πίνακα ρυθμών μεταβολής

$$Q = (q_{ij}), \quad q_i = -q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$\Pr[X(t+h)=j | X(u), 0 \leq u < t, X(t)=i]$$

$$\text{ii)} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{ij}h + o(h), & j \neq i \\ 1 - q_i h + o(h), & j = i \end{cases} \quad h \rightarrow 0^+$$

$$\text{ii)} \Leftrightarrow \text{Ο χρόνος παραμονής σε κάθε κατ. } i \in S \text{ είναι} \\ \text{Exp}(q_i) \text{ και } \Pr[\text{επόμεν. κατ.} = j | \text{τρέχουσα} = i] = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j \neq i$$

$$\text{iii)} \Leftrightarrow \text{Σε κάθε κατάσταση } i \in S \exists T_{ik} \sim \text{Exp}(q_{ik}), \quad k \neq i \\ \text{και η επόμενη μεταβολή θα γίνει σε χρόνο} \\ \min_{k \neq i} T_{ik}, \text{ προς την κατ. } j \text{ που } T_{ij} = \min_{k \neq i} T_{ik}$$

② Εξισώσεις Ισορροπίας - Αδιαχωρ. Μ.α.σ.χ

Ορισμός

Έστω $\{X(t)\}$ Μ.α.σ.χ. Τότε $\{X(t)\}$ αδιαχωρίστη

$\Leftrightarrow \forall i, j \in S \exists i_1, i_2, \dots, i_n \in S \text{ s.t. } q_{i_1 i_2} \dots q_{i_n j} > 0$

Θεωρημα:

$p_{ij}(t)$

Αν $\{X(t)\}$ αδιαχωρίστη Μ.α.σ.χ τότε $\forall i, j \in S$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(t) = j | X(0) = i] = p_j$$

η δ. η $\{X(t)\}$ να επισκεπτάσθ. κατ. j

Αντίστροφο

Εξ. Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(h), i, j \in S$$

$$p_{ij}'(t) = -p_{ij}(t) q_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj}$$

$t \rightarrow \infty$

$$0 = -p_j q_{jj} + \sum_{k \neq j} p_k q_{kj}, j \in S$$

$$\Rightarrow p_j \underbrace{q_{jj}}_{\sum_{k \neq j} q_{jk}} = \sum_{k \neq j} p_k q_{kj}, j \in S \quad \text{Εξισορροπία για την j}$$

③ Ερχόμικο Θεωρημα Μ.α.σ.χ

Εστω $\{X(t)\}$ αδιαχωρίστη Μ.α.σ.χ με $X \neq S$,
 πυθμους $q_{ij}, i \neq j, q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, i \in S$

Αν το σύστημα εξισορροπίας:

$$p_j q_{jj} = \sum_{k \neq j} p_k q_{kj}, j \in S$$

και της εξισ. κανονικοποίησης:

$$\sum_{j \in S} p_j = 1$$

Τότε:

i) Η συνάρτηση του συστήματος είναι μοναδική ($p_j: j \in S$)

ii) Κάθε συνάρτηση του συστήματος εξισορρόπησης ($X_j: j \in S$) είναι της μορφής $X_j = CP_j$ για

κάποια σταθερά c .

$$\text{iii) } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du}{t} = p_j \quad \mu \in \pi | 0, 1 \quad \forall j \in S$$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου στην j

$$\text{iv) } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du \right]}{t} = p_j \quad \forall j \in S$$

Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου στην j

$$\textcircled{*} \text{ C-lim } f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t f(u) du}{t}$$

$$\text{v) } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u)=j] du}{t} = \text{C-lim } \Pr[X(t)=j]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(U_t)=j] = p_j$$

Uniform $[0, t]$

$$\left[\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Pr[X(\underbrace{U_t}_{\sim U})=j | \underbrace{U_t=u}_{1/t}] \cdot \underbrace{f_{U_t}(u)}_{1/t} du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u)=j] du}{t} \quad \checkmark \end{aligned} \right]$$

$$\text{vi) } \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[X(t)=j] = p_j, \quad j \in S$$

Επίσης αν $\Pr[X(0)=j] = p_j, j \in S$ τότε

$$\Pr[X(t)=j] = p_j \quad \forall t \geq 0, j$$

✱

▷ Η (p_j) λέγεται οριστική κατανομή, ή κατανομή ισορροπίας ή σταθερή κατανομή της $\{X(t)\}$

▷ Το σύστημα των εξισορροπίας γράφεται ως:

$$p^T Q = \underline{0}^T \quad \left(\begin{array}{l} p \text{ αριστερά ιδιοδιάνυσμα του } Q \\ \text{με ιδιοτιμή } 0 \end{array} \right)$$

④ Ερμηνείες

- $\{X(t)\}$ αδιαχ. Μ.α.σ.χ.
- (p_i) : κατανομή ισορροπίας
- (q_{ij}) : πυθλος μεταβάσεως, $j \neq i$
- $q_i = -q_{ii}$: πυθλος εξόδου
- $p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[X_{\text{συνν. } i \text{ στο } (0, t]}]}{t}$: Μαρ. ποσοστό χρόνου συνν. i
- $q_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\# \text{ μεταβ. } i \rightarrow j \text{ στο } (0, t]}]{E[X_{\text{συνν. } i \text{ στο } (0, t]}]}$: Μαρ. πυθλος μεταβ. $i \rightarrow j$ ανά χρόν. μον. παραλύνε συνν. i
- $p_i q_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\# \text{ μεταβ. } i \rightarrow j \text{ στο } (0, t]}]{t}$: Μαρ. πυθλος μεταβ. $i \rightarrow j$

Εξισ. ισορροπίας για ενν. j

$$\underbrace{p_j q_j}_{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij} \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\# \text{ μεταβ. } \rightarrow j \text{ στο } (0, t]}]{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\# \text{ μεταβ. } j \rightarrow \text{ στο } (0, t]}]{t}$$

⑤ Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

Εστω $A \subseteq S$. Πυθλος εξόδου = Πυθλος εισόδου
από το A στο A

$$\Rightarrow \sum_{i \in A} \sum_{j \notin A} p_i q_{ij} = \sum_{j \in A} \sum_{i \notin A} p_i q_{ji}, \quad A \subseteq S$$

Εξισ. Γενικ. Ισορροπίας

⑥ Υπολογ. μακροπρόθ. πυθμων κοστους

$\{X(t)\}$ αδιαχωρίση Μ.α.σ.χ με π.ν. πυθμων

$Q = (q_{ij})$ και καταν. ισορροπίας $p = (p_j)$

Εστω δομή κοστους:

$c: S \rightarrow \mathbb{R}$ με

$c(i)$: κοστος παραμ. ανα χρον. μον. στην i

$d: (S \times S) \setminus \{(i,i): i \in S\} \rightarrow \mathbb{R}$

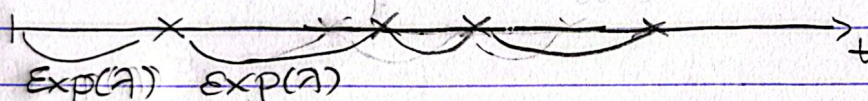
$d(i,j)$: κοστος μεταβ. $i \rightarrow j$

Τότε:

$$\text{Μακροπρόθ. Πυθμος} = \sum_{i \in S} p_i c(i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \neq i} p_i q_{ij} d(i,j)$$

⑦ Παράδειγμα 1: Διαδ. Poisson

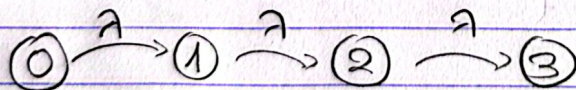
Γεγονοτα συββαινουν με ενδιατ. χρονους $\text{Exp}(\lambda)$



$Q(t) = \# \text{γεγον. στο } (0, t]$

$\{Q(t)\}$ Μ.α.σ.χ = ;

Κατασθε	Ενοτ. κατ	Χρονος
$n \geq 0$	$n+1$	$\text{Exp}(\lambda)$ ✓



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

⑧ Παράδειγμα 2: M/M/1/2 ουρά

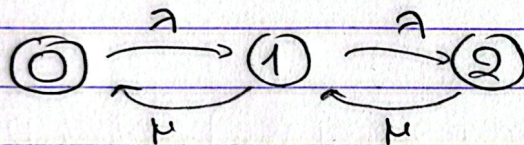
$Q(t) = \# \text{ περ. εν σειρά τη } t$

λ : ρυθμός αφίξεων

μ : ρυθμός εξυπηρ.

$\{Q(t)\}$ Μ.α.σ.χ;

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος	
0	1	$\text{Exp}(\lambda)$	} όλα Exp ↓ <u>Μ.α.σ.χ</u>
1	0	$\text{Exp}(\mu)$	
	2	$\text{Exp}(\lambda)$	
2	1	$\text{Exp}(\mu)$	



$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$