

Ασκήσεις στα Βασικά Αποτελέσματα και στην Ανάλυση Μεσής Τιμής



① AMT της M/M/1 με εν K-πολιτική ένερχον

- M/M/1
- λ : αριθμός αφίξης
- μ : αριθμός εξυπηρ.
- Κενο συστήματος $\rightarrow$ Ακαριαία ανένερχ
- Μόλις συσσωρευθούν $K \rightarrow$ Ακαριαία ένερχον.
- $E[Q] = ?$, $E[S] = ?$

Λύση:

• N. Little $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

• Δεσφ. για

1 υπολ. του S: $E[S] = \Pr[I=1] E[S|I=1]$

σε Q και $+ \Pr[I=0] E[S|I=0]$ (*)

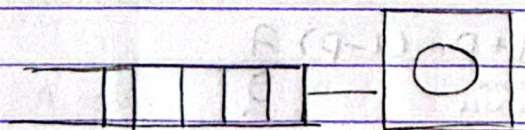
σε I

↓

$I = \text{καταστ. υπηρ} = \begin{cases} 1, & \text{ένερχος} \\ 0, & \text{ανένερχος} \end{cases}$

▷ Γενικευμένη PASTA:

$$\Pr[I=1] = \Pr[I=1]$$



Θ. Little στο χώρο εξυπ.

$$E[Q_s] = \lambda \cdot \underbrace{E[B]}_{1/\mu} = \rho$$

$$E[I]$$

$$\Pr[I=1]$$

Επίσης:

$$\bullet E[S|I=1] = [Q+1|I=1] \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\triangleright E[S|I=0] = E[k - (Q^- + 1) | I=0] \cdot \frac{1}{\lambda} + E[Q^- + 1 | I=0] \cdot \frac{1}{\mu}$$

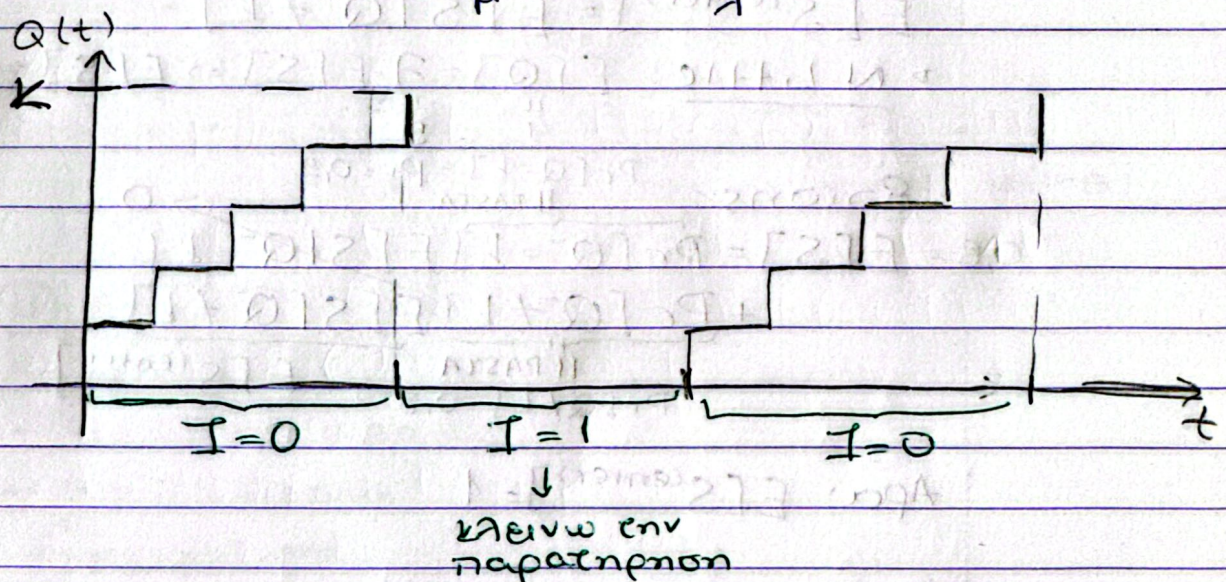
Αρα από τα παραπάνω παίρνουμε:

$$E[S] = \Pr[I=1] (E[Q^- + 1 | I=1] \cdot \frac{1}{\mu}) + \Pr[I=0] (E[Q^- + 1 | I=0] \cdot \frac{1}{\mu}) + \Pr[I=0] \cdot E[k - Q^- - 1 | I=0] \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E[S] = \underbrace{E[Q^- + 1]}_{\text{PASTA}} \cdot \frac{1}{\mu} + (1-p) \cdot \frac{1}{\lambda} (k-1 - E[Q^- | I=0])$$

$$\downarrow$$

$$= (E[Q] + 1) \cdot \frac{1}{\mu} + (1-p) \cdot \frac{1}{\lambda} (k-1 - E[Q | I=0])$$



Παίρνουμε ότι

$$(Q | I=0) \sim \text{Uniform}(\{0, 1, \dots, k-1\})$$

Τελικά:

$$E[Q] = p E[Q] + p + (1-p) \left(k-1 - \frac{k-1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E[Q] = \frac{p}{1-p} + \frac{k-1}{2}} \Rightarrow \boxed{E[S] = \frac{1}{\mu(1-p)} + \frac{k-1}{2\lambda}}$$

(2) Ασκ. 1.7

- Διαδ. αφίξεων Poisson ✓
- $\lambda = 5$ περ/1 ώρα ✓
- Περ. χωρητ. k ✓
- $p_k = 0,2$ ✓
- $E[Q] = 4$ ✓
- $E[S^{(enter)}] = ?$

χρονος παραλ.
εισερχ. περ

Λυση

$$\Pr[Q \neq k] = 1 - p_k = 0,8$$

$$E[S^{(enter)}] = E[S | Q \neq k]$$

↳ N. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S] \Rightarrow E[S] = \frac{4}{5} = 0,8$

Ενδεσ: $\Pr[Q=k] = p_k = 0,2$
|| PASTA

$$0,8 = E[S] = \underbrace{\Pr[Q=k]}_{\substack{\text{|| PASTA} \\ \Pr[Q=k]=0,2}} E[S | Q=k] + \underbrace{\Pr[Q \neq k]}_{\substack{\text{|| PASTA} \\ \Pr[Q \neq k]=0,8}} E[S^{(enter)}]$$

Αρα: $E[S^{(enter)}] = 1$

(3) Ασκ. 1.4

- G/M/1
- μ : ποσος εξυγ.
- $\alpha_j = \Pr[Q^- = j] = (1-\alpha)\alpha^j, j=0,1,\dots$
- $E[Q^-] = ?; E[S | Q^- = j] = ?; E[S] = ?$

Λυση:

$$\begin{aligned} E[Q^-] &= \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr[Q^- = n] = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-\alpha) \alpha^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^{n+1} \end{aligned}$$

Exoute: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{d/d\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$

Αρα: $E[Q^-] = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} - \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

• $E[S|Q^- = j] = \frac{j+1}{\mu}$

~~$E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^- = j] E[S|Q^- = j]$~~

• $E[S] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^- = j] E[S|Q^- = j]$

$= \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^- = j] \cdot \frac{j+1}{\mu}$

$= E\left[\frac{Q^- + 1}{\mu}\right] = \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\alpha)}$

④ Ασκήση 1.9

- M/M/c

- $\lambda = 5$ πελάτες/ώρα

- $b = 78$ λεπτά

↑
μέσος χρόνος

i) ελαχ. c για ευθεία

ii) ελαχ. c τω $Pr[\text{ανασχ. υπηρε}] \leq 80\%$

Λύση

i) Για ευθεία σε G/G/c πρέπει και αρκεί

$\rho < 1$ (εδώ M/M/c εἰς. περ)

$\rho = \lambda \cdot b = 5 \cdot \frac{78}{60} \Rightarrow \rho = 6,5$

Αρα ελαχ. c για ευθεία $c = 7$

$$ii) \Pr[\text{ανασφ. υπηρ}] \leq 0,8$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{c} \leq 0,8 \Leftrightarrow \frac{6,5}{c} \leq 0,8 \Rightarrow c \geq \frac{6,5}{0,8} \Leftrightarrow c \geq \frac{65}{8}$$

Αρα ελαχ. c είναι 9

⑤ Ασκ 1.6

Συστ. εflux. με κέμον μεταβάσεις

Q_n^- : # πελατών πριν την n -οστή αρίστη

Q_n^+ : # πελατών μετά την n -οστή αναχώρ.

Αρχικοί κενό συστήμα

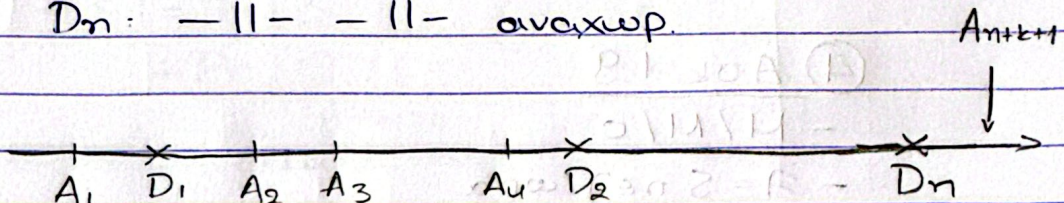
$$i) N\mathcal{D}_0 \{Q_n^+ \leq k\} = \{Q_{n+k+1}^- \leq k\} \quad \forall n \geq 1, k \geq 0$$

$$ii) a_j = d_j \quad \forall j \geq 0$$

Απόδ:

i) A_n : Χρονος n -οστής αρίστης

D_n : —||— —||— αναχώρ.



$$① \boxed{Q_n^+ \leq k} \Leftrightarrow \text{Τη στιγμή } D_n \text{ στο σύστημα}$$

$Q(D_n)$ υπάρχουν το πολύ k πελάτες

$\Leftrightarrow$ Μέχρι τη στιγμή D_n έχουν έρθει στο σύστημα το πολύ $n+k$ πελ.

$$\Leftrightarrow D_n \leq A_{n+k+1} \quad ②$$

$\Leftrightarrow$ Μέχρι τη στιγμή A_{n+k+1} έχουν

φυγεί από το σύστημα τουλάχιστον n πελ.

$\Leftrightarrow$ Τη στιγμή A_{n+k+1} στο σύστημα υπάρχουν το πολύ k

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_{n+k+1}^- \leq k} \quad ③$$

ii) And to i) exoute:

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Q_n^+ \leq k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Q_{n+k+1}^- \leq k]$~~

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Q_n^+ \leq k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Q_{n+k+1}^- \leq k]$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^k d_j = \sum_{j=0}^k a_j, \quad k \geq 0$$

$$\Rightarrow d_k = a_k, \quad k \geq 0$$