

PASTA, Νόμος Little και Αναγωγή Μέσης Τιμής

① Ιδιότητα PASTA

Συστέλλει με Poisson $\rightarrow (P_j) = (\alpha_j)$
 Διαδικ. αφίξεων

Αιτιολόγηση

$$\alpha_j = \Pr[j \text{ περ. σε συστήν αφίξεων}]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \Pr[Q(t) = j \mid A(t, t+h) = 1]$$

#αφίξεων στο $(t, t+h]$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j] \Pr[A(t, t+h) = 1 \mid Q(t) = j]}{\Pr[A(t, t+h) = 1] / h}$$

$$\circledast = P_j$$

$$\circledast \lim_{h \rightarrow 0^+} \Pr[A(t, t+h) = 1 \mid Q(t) = j] / h = \lambda \quad \underline{\text{και}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \Pr[A(t, t+h) = 1] / h = \lambda$$

② Νόμος Little

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

Μέσος αρ.
πελάτων

Πυθμός
αφίξ.

Μέσος χρόνος
παραμονής περ.

Οικονομική αιτιολόγηση

Έστω ότι κάθε περ. πληρωθεί 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής.

Πυθμός κερδών

$$(\text{Χρημ. ανά χρον. μον.}) = E[Q]$$

με πληρωμές σε

συνεχή χρόνο

Ποσός κερδους

με πιθανότητα $= \lambda \cdot E[S]$

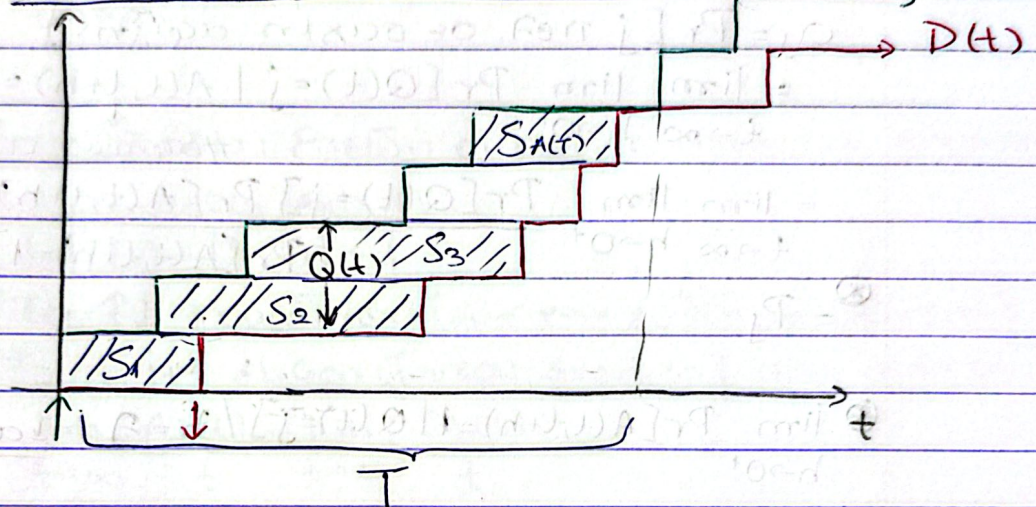
στην αναχώρηση

↓
ποσός
αναχωρ

↗ πιθανότητα
χρόνος ανα-
μεταστή

Άρα: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Μαθηματική Αιτιολόγηση



► $E[Q] = \frac{E\left[\int_0^T Q(u) du\right]}{E[T]}$

► $\lambda = \frac{E[A(T)]}{E(T)}$ #αριθμ. στο (0, T]

► $E[S] = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{A(T)} S_i\right]}{E[A(T)]}$ χρόνος παραμ. του i πελάτη

N. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$\Leftrightarrow E\left[\int_0^T Q(u) du\right] = E\left[\sum_{i=1}^{A(T)} S_i\right]$

Έστω $I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ πελ. βρίσκεται στο σύστημα} \\ 0, & \text{την χρ. στιγμή } t \end{cases}$ Διαφορετικά

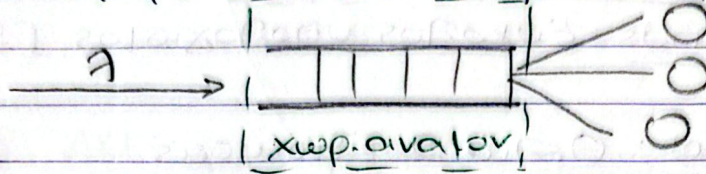
Τότε:

$E\left[\int_0^T Q(u) du\right] = E\left[\int_0^T \sum_{i=1}^{A(T)} I_i(u) du\right]$

$$= E \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{ACT} \int_0^T I_i(u) du}_{S_i} \right] = E \left[\sum_{i=1}^{ACT} S_i \right]$$

③ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ N.LITTLE

- Εφαρμογή στον χώρο ανατομής

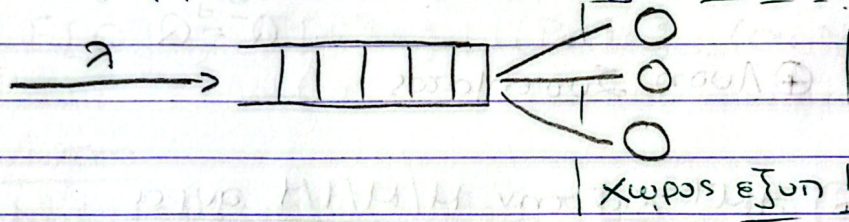


$$\bullet E[Q_q] = \lambda \cdot E[w]$$

↓
Μέσο # περ.
σε ανατομή

↓
Μέσος χρ.
ανατομής

- Εφαρμογή στον χώρο εξυπηρέτησης



$$\bullet E[Q_s] = \lambda \cdot b = \rho : \text{Ποσοτ. συνωδεύσεως}$$

↓
Μέσο # περ.
σε εξύπν.

↓
Μέσος
χρ. εξύπν.

- Σε συστήματα με 1-1 αντιστοιχία υπηρ.-περ.:

$$E[\# \text{αποσχ.}] = \rho$$

υπηρ.

- Σε G/G/c συστήματα

$$\# \text{αποσχ.} = \sum_{i=1}^c I_i \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ υπηρ. αποσχ.ηεται} \\ 0, & \text{διαφορ} \end{cases}$$

υπηρ.

$$\Rightarrow c E[I_i] = \rho$$

⇒ ποσοστό χρόνου

που είναι αποσχ.ημενος

έναν υπηρ.ετς

$$= \frac{\rho}{c}$$

- Σε G/G/1 συστήματα

$$E[Q_s] = \Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q \geq 1]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Pr[Q=0] = 1-p}}$$

④ Αναγωγή Means Times (AMT)

• Στόχος: Ευκολός υπολογισμός $E[Q], E[S]$

• Ιδέα: Θεώω 2 εξισώσεις

• 1^η: Νόμος Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

• 2^η: Δεσφύσθητε στο # περ.

που βλέπει μια αφιζή:

$$E[S] = E[\underbrace{E[S|Q^-]}_{f(Q^-)}] \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{αφιζής Poisson} \\ Q^- \stackrel{d}{=} Q}}{=} E[f(Q)]$$

⊕ Λύση Συστημάτων

⑤ AMT για την M/M/1/1 ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφιζή

- Exp(μ) χρ. εξυγ.

- 1 υπηρ.

- χωρητ. 1

$$E[Q] = ;, E[S] = ;, (P_n) = ;, (a_n) = ;, (d_n) = ;$$

Από N. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

• Ενδύσθε εσείς:

$$E[S] = \Pr[Q^- = 0] E[S|Q^- = 0] + \Pr[Q^- = 1] E[S|Q^- = 1]$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ \alpha_0 & 1/\mu \\ \parallel & \parallel \\ p_0 & \leftarrow \text{PASTA} \end{matrix}$$

$$\text{Αρα: } E[Q] = \lambda p_0 \cdot \frac{1}{\mu} \Rightarrow p_1 = p p_0$$

$$\text{Εν. Π. Λέον: } p_0 + p_1 = 1 \text{ οπότε } p_0 = \frac{1}{1+p}, p_1 = \frac{p}{1+p}$$

Μέσος. μεταβ.
↓

$$d_n = a_n = P_n = \begin{cases} \frac{1}{1+p}, & n=0 \\ \frac{p}{1+p}, & n=1 \end{cases}$$
 ↑
 PASTA

Αρα: $E[Q] = \frac{p}{1+p}$, $E[S] = \frac{1}{\mu(1+p)}$

⑥ AMT για την M/M/1 ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφίξ.
- Exp(μ) χρ. εξυγ.
- 1 υπηρ.
- Χωρητ. ∞
- FCFS

$E[Q]=;$, $E[S]=;$, $(P_n)=;$, $(a_n)=;$ $(d_n)=;$

Λύση:

▷ N. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

▷ Δεσμ. στο Q^- : $E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Q^-=n] E[S|Q^-=n]$
 για τον S

$= E\left[\frac{Q^-+1}{\mu}\right] \stackrel{\text{PASTA}}{=} E\left[\frac{Q+1}{\mu}\right]$

$f(Q) \leftarrow \text{αφίξιν}$

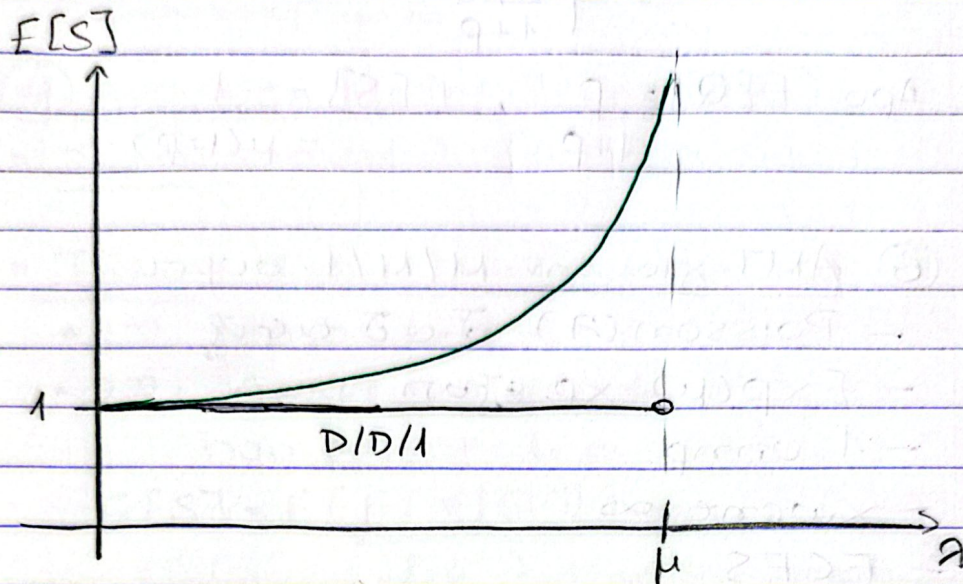
$\Rightarrow E[S] = \frac{E[Q]+1}{\mu}$

Αρα: $E[Q] = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(E[Q]+1) \Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$

$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

⚠ Η τυχαιότητα χαλάει πολύ την απόδοση! ⚠

<u>$\rho \lambda$</u>	$\mu = 1$	ρ	0,5	0,9	0,99	0,999
M/M/1 $\rightarrow$	$E[S]$	2	10	100	1000	
D/D/1 $\rightarrow$	$E[S]$	1	1	1	1	



Ασκήσεις: 1.10-1.10
(ευκολίες πάνω την 1.6)

8/10

Υπολογισμοί με Ανάλυση Μεσής Τιμής και Αναγεννητικά Επιχειρήματα

① M/M/1 ουρά

- Poisson διαδ. αριθμών ρυθμού λ
- $\text{Exp}(\mu)$ χρ. έξοδ
- 1 υπηρ
- ∞ χωρη
- FCFS
- $E[Q], E[S], p_n = \Pr[Q=n]$
- $a_n = \Pr[Q^-=n]$
- $d_n = \Pr[Q^+=n]$

► I : περίοδος αρχίας

► Y : περίοδος συνεχούς λειτ

► Z : κύκλος αναμονής

• N : # πελατών που εξυπηρετ. σε 1 εξυπ. $E[I], E[Y], E[Z], E[N], \Pr[N=1]=;$

Λύση

• Θυμίζω το ενικότητα για εύρεση $E[Q], E[S]$.

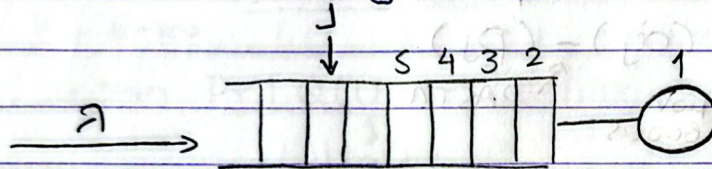
• N.Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

• Υπόθ. S : $E[S] = \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} \stackrel{\text{PASTA}}{=} \frac{E[Q] + 1}{\mu}$

δεσμ. στο Q^-

$$\Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}, E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

• Για τον υπολογισμό της (ρ_n) εφαρμόζω τον N.Little στην j θέση



Q_j = # πελ. στη j θέση

S_j = χρόνος παρ. πελ. στη j θέση

λ_j = ρυθμός αλλαγών στη j θέση

• N.Little: $E[Q_j] = \lambda_j \cdot E[S_j]$

$$\Rightarrow E[Q_j] = 1 \cdot \Pr[Q_j=1] + 0 \cdot \Pr[Q_j=0] = \Pr[Q \geq j]$$

$$\Rightarrow E[Q_j] = \Pr[Q \geq j] = \sum_{k=j}^{\infty} p_k$$

• $\lambda_j = \lambda$

$$\Rightarrow E[S_j] = \Pr[Q < j-1] \cdot E[S_j | Q < j-1] + \Pr[Q \geq j-1] \cdot E[S_j | Q \geq j-1] \quad \text{1/}\mu$$

$$\Rightarrow E[S_j] = \sum_{k=j-1}^{\infty} \alpha_k \cdot \frac{1}{\mu} \quad \text{Απαιτ.}$$

$$\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} \alpha_k \cdot \frac{1}{\mu} \stackrel{\substack{\rho = \lambda/\mu \\ \text{PASTA}}}{=} \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k, \quad j=1, 2, \dots$$

Για $j \rightarrow j+1$ έχουμε:

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = p \sum_{k=j}^{\infty} p_k$$

~~Παράγωγος~~ ~~$p_j = p p_{j-1}$~~

Ακολουθώντας παρόμοια:

$$p_j = p p_{j-1}, j \geq 1 \Rightarrow p_j = p^j p_0, j \geq 1$$

όπου $p_0 = 1 - p$ (είτε από γενικό αποτέλεσμα για $G/G/1$ είτε $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} p^j p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - p$)

Αρα τελικά:

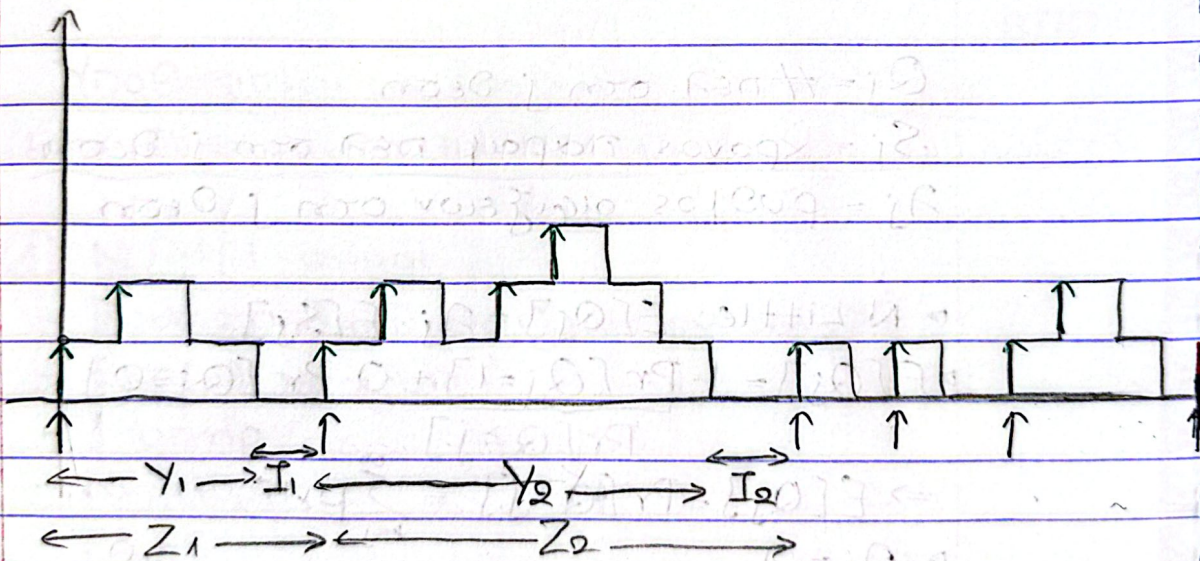
$$p_j = (1-p) p^j, j \geq 0$$

$Q \sim \text{Geom}(p)$ στο $\mathbb{N}$

$$(d_j) = (\alpha_j) = (p_j)$$

↑
Μέγ. μεταβάσεις

↑
PASTA



$$N_1=2 \quad N_2=4 \quad N_3=1 \quad N_4=1 \quad N_5=2$$

$$E[I] = E[Y | \text{no arrival in } \exp(\lambda)] \stackrel{\text{ακμμή}}{=} \frac{1}{\lambda}$$

Από αναγεννητική διαδικασία της $\{Q(t)\}$

$$p_0 = \frac{E[\text{Χρόνος παρακ. στην 0 σε ένα κύκλο}]}{E[\Delta \text{ διαρκεία κύκλου}]}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-p = \frac{1/\lambda}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-p)}$$

$$\text{Αρα: } E[Y] - E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-p)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\lambda(1-p)}$$

* $\{Q(t)\}$ αναγεννητική στα G/G/C με αναγεννητικά σήματα ως χρονικές διαγίξεις αρίθμων σε κενό σύστημα

$$\text{Τότε: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du}{t}$$

Υπόθεση!

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du]}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[Q(u)=j] du}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(U_t)=j] = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(t)=j]$$

$$= \frac{E[\int_0^{\infty} 1_{\{Q(u)=j\}} du]}{E[Z]} = p_j - \Pr[Q=j]$$

Αρα για $j=0$ παίρνω το παραπάνω!

Εναλλακτικός υπολογισμός της $E[Y]$:

$$E[Y] = E[B] + \lambda E[B] E[Y] \Rightarrow \dots$$

Μέρος
xp. ejun
lou net

Μέρος
#αρίθμων
στη διακεία
της ms ejun.

$$\text{*} \lambda E[B] = p$$

#Poisson
αρίθμων σε
χρόνο B_1

$$Y = \underbrace{B_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{xp. ejun} \\ \text{lou net}}} + \sum_{k=1}^{N(B_1)} \underbrace{Y_k}_{\substack{\rightarrow \text{χρονος για} \\ \text{να πατε } k \rightarrow k-1}}$$

(τυχαίες μεταβλητές)

Ομοίως για την $E[N]$:

$$E[N] = 1 + \lambda E[B] E[N] \Rightarrow E[N] = \frac{1}{1-p}$$

Ευαγγελισμός υπολογισμός για την $E[N]$

Μακροπρόθ.

$$\lambda = \text{ποσός αρίθ} = \frac{E[N]}{E[Z]} \Rightarrow \text{~~Ε[Ν] = λ · Ε[Ζ]}~~$$

$$\Rightarrow E[N] = \lambda \cdot E[Z] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda(1-p)} \Rightarrow E[N] = \frac{1}{1-p}$$

$$\begin{aligned} \bullet \Pr[N=1] &= \Pr \left[\frac{\text{χρόνος ως}}{\text{ενεργή ενόλην εἶναι}} > \frac{\text{χρόνος}}{\text{εἶναι}} \right] \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} > \frac{\mu}{\mu + \mu} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lambda < \mu$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \Pr[X > Y] &= \int_0^{\infty} (1 - F_X(y)) f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} dy \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{για } X \sim \text{Exp}(\lambda) \\ &\quad Y \sim \text{Exp}(\mu) \end{aligned}$$

② ANT για την M/M/1 με χρόνους εκκίνησης

- M/M/1 με λ : ποσός αρίθ

μ : ποσός εἶναι

- Ακαριαία απελευθέρωση. υπηρε όταν αδειάσει το συστ.

- Με αρίθμ πελάτη σε κενό συστ. αρχίζει χρόνος ενεργότητας $\sim \text{Exp}(\theta)$

$$E[Q] = ? , E[S] = ?$$

Λύση

$$Q(t) = \# \text{ πελ. σε σειρά σε } t$$

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρ. ενεργός εν σειρά σε } t \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$$\triangleright \text{N. Little: } E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

~~$E[S] = \frac{1}{\theta}$~~

▷ Υποθέτουμε S με διαστ. στο Q, I^-

- $E[S | I^- = 1] = \underline{E[Q^- + 1 | I^- = 1]}$

- $E[S | I^- = 0] = \frac{1}{\theta} + \frac{\mu}{\mu} E[Q^- + 1 | I^- = 0]$

Ομως:

$$E[S] = \Pr[I^- = 1] E[S | I^- = 1] + \Pr[I^- = 0] E[S | I^- = 0]$$

Γενικά: $\Pr[I^- = i] \stackrel{\text{PASTA}}{\downarrow} \Pr[I = i]$

$$\Pr[I = 1] = p$$

$\uparrow$
θ·Little στον χώρο εξυγ.

Αρα:

$$E[S] = p \cdot \underline{E[Q^- + 1 | I^- = 1]} + (1-p) \cdot \underline{E[Q^- + 1 | I^- = 0]}$$

$$+ (1-p) \cdot \frac{1}{\theta} \quad \text{ομως } p = \Pr[I = 1]$$

$\theta \triangleq Q$ PASTA

$$1-p = \Pr[I = 0]$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{E[\cancel{Q}^- + 1]}{\mu} + (1-p) \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{E[Q] + 1}{\mu} + (1-p) \cdot \frac{1}{\theta}$$

Επομένως

$$E[Q] = \lambda \left(\frac{E[Q] + 1}{\mu} + (1-p) \cdot \frac{1}{\theta} \right)$$

$$\Rightarrow E[Q] = \underbrace{p E[Q]}_{\text{αυτοστοιχο τns M/M/1}} + p + (1-p) \frac{\lambda}{\theta}$$

$$\Rightarrow E[Q] = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{\theta} \quad \text{Τότε}$$

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1-p)} + \frac{1}{\theta}$$