

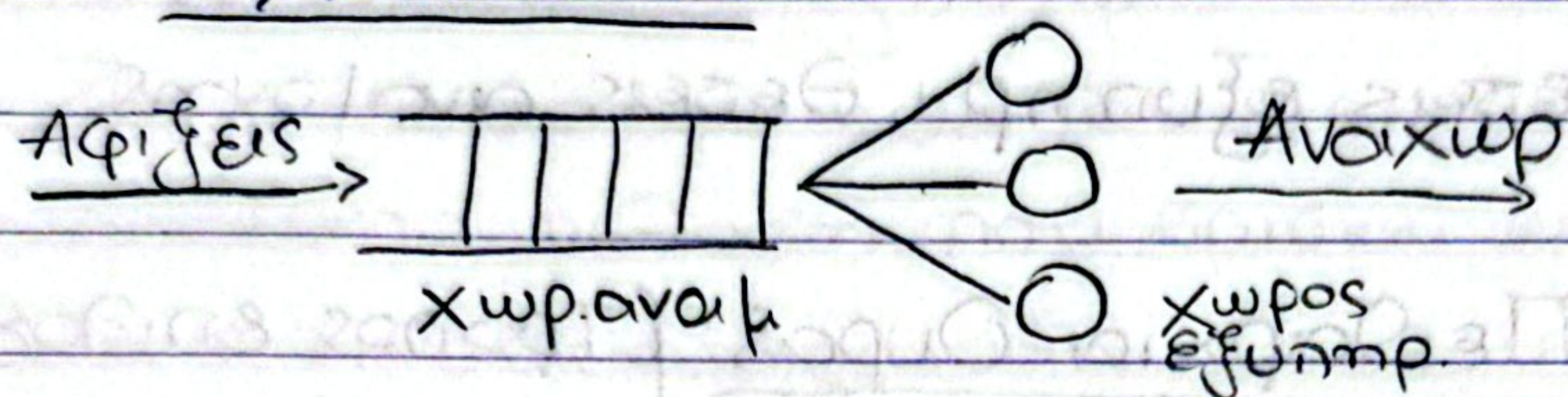
# ΤΥΠΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

29/9

Στοχαστική Ε.Ε  $\begin{cases} \rightarrow \text{Ουρές Αναμονής} \\ \rightarrow \text{Συστ. Απόδελτων} \end{cases}$

## ① Ουρά $\equiv$ Σύστημα εξυπηρέτησης

Σύστημα εισόδου-εξόδου με διακρ. Ιοναδες και τυχαυστητα



## ② Επηρεδα - Μελέτης

- Μοντελοποίηση

$\rightarrow$  Απόδειξη απόδοσης (Στοχ: Ανεπίξεις  $\rightarrow$  Μαρκοβ. αλυσίδες συνεχούς χρόνου)

$\dots \rightarrow$  Βέλτιστος σχεδιασμός (Μη-χρ. προχρ. / Ακέραιος-κυρτός)

- Βέλτιστος έλεγχος (Δυναμικός προχρ.)

$\dots \rightarrow$  Στρατηγική συλειτουργία πελατών / διαχειρ. (Θ. Παιχνιών)

## ③ Βασικά Χαρακτηριστικά (Kendall)

1 | Διαδικασία αφίξεων: (A)

▷ D (Deterministic): Σταθεροί ενδιάμ. χρ. αφίξεων

▷ M (Markovian, Memoryless):

Εξθετικοί ενδιάμ. χρ. αφίξεων (διαδ. Poisson)

▷ Er: Erlang(r, λ) ενδιάμ. χρ. αφίξεων

▷ Hr: Hyperexp(p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, ..., p<sub>n</sub>, λ<sub>1</sub>, λ<sub>2</sub>, ..., λ<sub>n</sub>) ενδιάμ. χρόνοι αφίξεων

▷ G  $\equiv$  GI: General (General Indep)

ανεξ. και ισον. ενδιάμ. χρ (ανανεωτική διαδ. αφίξ)

2 | Χρονοί εξυπηρέτησης (ανεξ, ισον) (B)  
Με κατανομή όπως στο 1 |

3 | Αριθμός παρατηρήτων υπηρε. c

4 | Χωρητικότητα συστή. k  
||

Θέσεις εξυπηρ + θέσεις αναμονής

5 | Πειθαρχία Ουράς (Τρόπος επιλογής πελάτη για εξυπηρέτηση)

- FCFS (First-Come, First-Served)  $\equiv$  FIFO
- LCFS (Last-Come, First-Served)  $\equiv$  LIFO
- LCFS / PR (Last-Come, First-Served / Preemptive Resume)
- SSTF (Shortest-Service-Time-First)

Ονοματολογία Kendall : A/B/C/k ( )

$k = \infty$

( ) = (FCFS)  $\rightarrow$  Παραλείπει.

π.χ D/M/1/3 (LCFS)

④ Βασικά χαρακτηριστικά περιγραφής συστήμ

- Τύπος: A/B/C/k ( )

-  $a$ : μέσος ενδιάμεσος χρ. αφίξεων

$\lambda = \frac{1}{a}$ : συχνότητα αφίξεων  
(ρυθμός)

-  $b$ : μέσος χρ. εξυπηρ.

$\mu = \frac{1}{b}$ : ρυθμός εξυπηρ.

### ⑤ Βασικές ε.μ. αποδόσεις συστήματος

Διαχείρ.  $\left\{ \begin{array}{l} Q(t) = \# \text{ πελατών εν σειρά τη } t \\ Q_p(t) = \text{---||---} \text{---||---} \text{ στο χώρο αναμονής} \\ Q_s(t) = \text{---||---} \text{---||---} \text{ στο χώρο εξυπηρ.} \end{array} \right.$

Πελάτης  $\left\{ \begin{array}{l} S_n = \text{χρόνος παραμονής του } n\text{-οστού πελάτη} \\ W_n = \text{---||---} \text{ αναμονής ---||---} \\ B_n = \text{---||---} \text{ εξυπηρ. ---||---} \end{array} \right.$

Υπηρ.  $\left\{ \begin{array}{l} Z_n = n\text{-οστος κύκλος λειτουργίας} \\ \quad (\text{από πελάτη που βρίσκει κενό έως τον επόμεν.}) \\ Y_n = n\text{-οστή περίοδο συνεχούς λειτ.} \\ I_n = n\text{-οστή ---||--- αρχίας} \end{array} \right.$

### ⑥ Μαθηματικές Διατυπώσεις για μέτρα απόδοσης

$\rho_n$ : Πιθανότητα η παρόντων πελατών  
 $\Pr[Q=n] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=n\}} du}{t}$

↳ Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου με  $n$ -πελάτες

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=n\}} du\right]}{t}$$

↳ Μέσο μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου με  $n$ -πελάτες

$$= \frac{E\left[\int_0^Z 1_{\{Q(u)=n\}} du\right]}{E(Z)}$$

$Z$ : κύκλος λειτουργίας

↳ Ποσοστό του χρόνου στην κατάσταση  $n$  σε 1 κύκλο

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(U_t)=n]$$

$\uparrow$   
Uniform(0,t)

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Pr[Q(u)=n | U_t=u] \cdot f_{U_t}(u) du$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \Pr[Q(u)=n] du}{t} \quad \text{C-ορίστη η ιδ.}$$

$$: \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[Q(t) = n] \text{ ορισμένη τιμή.}$$

### Παρατήρηση

Και οι 5 "απεικονίσεις" δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα (αν η  $\{Q(t)\}$  εναρμονισμένη)

Ομοίως:

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{S_i \leq x\}}}{n} \\ \Pr[S \leq x] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^n 1_{\{S_i \leq x\}}\right]}{n} \\ &= \frac{E\left[\sum_{i=1}^{A(Z)} 1_{\{S_i \leq x\}}\right]}{E[A(Z)]} \end{aligned}$$

χρονός  
παραμ. νεφ

$A(Z) = \# \text{αριθμών σε 1 κουτί-αέρι.}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Pr[S_i \leq x]}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[S_n \leq x] \end{aligned}$$

Ομοίως: Μέσος αριθμός νεφ. στο σύστημα

$$E[Q] = \frac{\int_0^t Q(u) du}{t}$$

$$= \frac{E\left[\int_0^t Q(u) du\right]}{t}$$

$$= \frac{E\left[\int_0^Z Q(u) du\right]}{E[Z]}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t E[Q(u)] du}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} E[Q(t)]$$

## ① Αναγεννητικότητα

Ορισμός:

Έστω  $\{x(t): t \geq 0\}$  στοχαστική διαδικασία <sup>χρόνος</sup>  $\uparrow$

$\{x(t)\}$  λέγεται αναγεννητική αν  $\exists (S_1) \geq 0$  με

$\Pr[S_1 = 0] < 1$  και  $\Pr[S_1 < \infty] = 1$  τ.ω:

(i)  $\{x(t): 0 \leq t \leq S_1\}$  και  $\{x(t): t \geq S_1\}$  ανεξ.

$\hookrightarrow$  Ξεκινάω το παρελθόν και κάνω reset

(ii)  $\{x(t): t \geq 0\}$  και  $\{x(t): t \geq S_1\}$  στοχ. ισοδύναμα

## Θεώρημα

Σε συστήματα  $G/G/c, m$   $\{Q(t): t \geq 0\}$  όπου  $Q(t) = \#$  πελάτων τη στιγμή  $t$  είναι αναγεννητική με σημεία αναγέννησης τις στιγμές που ένας πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό.  
(Αρχές κυλών λειτουργίας)

## ② Εμφυτευμένες διαδικασίες πηθούς πελάτων σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

Συστήματα εξυπηρέτησης με:

$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots$  Στιγμές αφίξεων πελ.

$0 \leq D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \dots$  Στιγμές αναχωρ. πελ.

►  $Q_n^- = Q(A_n^-)$ : πηθος πελατων που βλέπει όταν μπαίνει ο  $n$ -οστος πελάτης

►  $Q_n^+ = Q(D_n)$ : πηθος πελατων που αφήνει όταν βγαίνει ο  $n$ -οστος πελάτης

►  $\alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[Q_n^- = k]$ : Μακροπρόθεστο ποσοστό

πελατων που βλέπουν  $k$  πελάτες κατά την είσοδο τους

$\rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[Q_n^+ = k]$ : Μακροπρόθεσμο ποσοστό

πελάτων που ~~επισκέπτονται~~ <sup>αφήνουν</sup> 1 πελάτες κατά την αναχώρησή τους

3 κατανομές # πελάτων

$$p_n = \Pr[Q = n]$$

$$a_n = \Pr[Q^- = n]$$

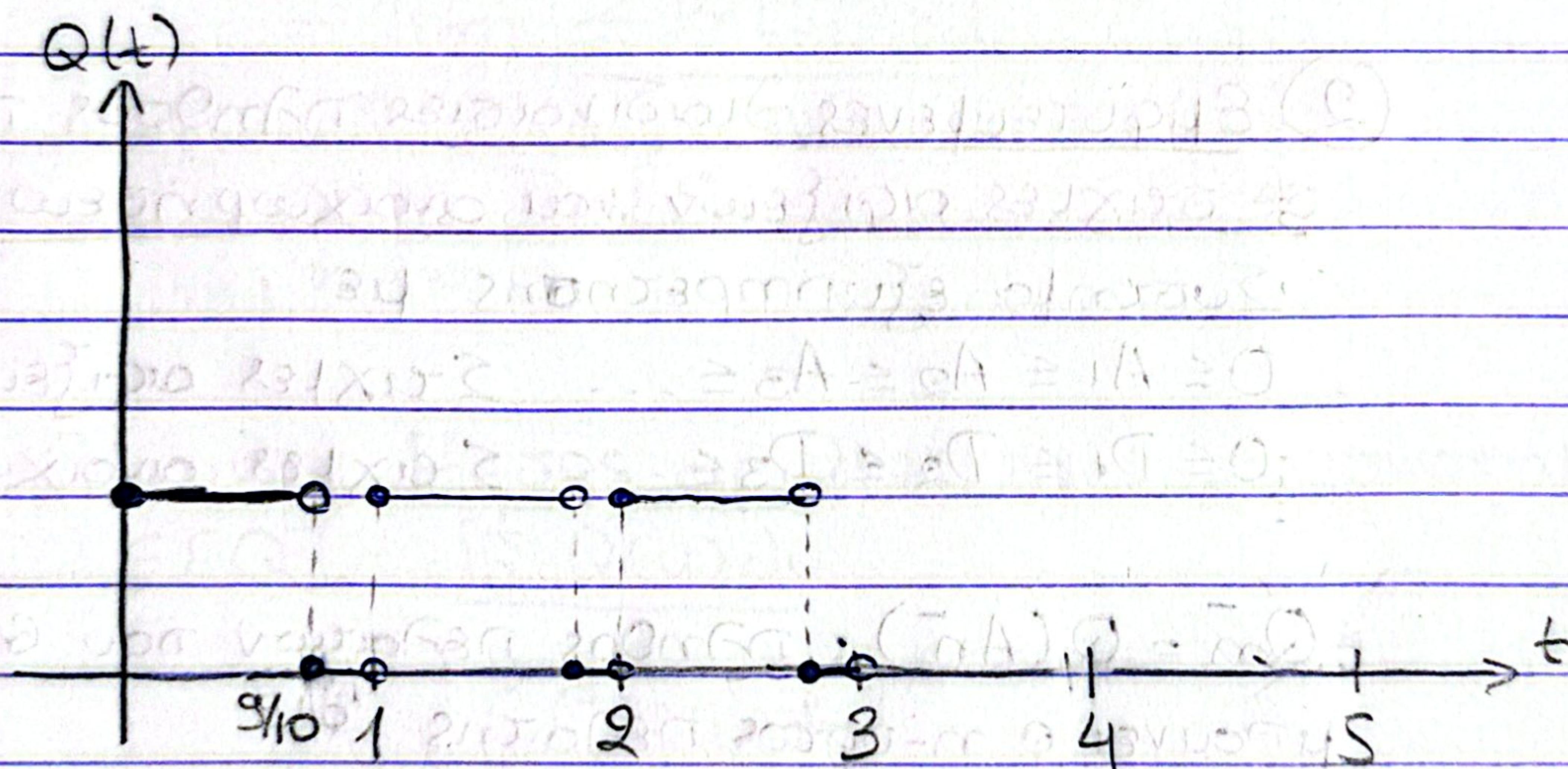
$$d_n = \Pr[Q^+ = n]$$

Ποια είναι η σχέση τους;

(3) Παράδειγμα 1: D/D/1 ουρά

1<sup>ο</sup> Σενάριο:  $\alpha$  = Μέσος ενδιάμ. χρόνος αφιζ = 1

$b$  = Μέσος χρόνος εξυπ = 0,9



$$p_n = \begin{cases} 0,1 & , n=0 \\ 0,9 & , n=1 \\ 0 & , n \geq 2 \end{cases}$$

$$d_n = a_n = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

2<sup>ο</sup> Σενάριο:  $a_1 = 1$   
 $b = 0,1$

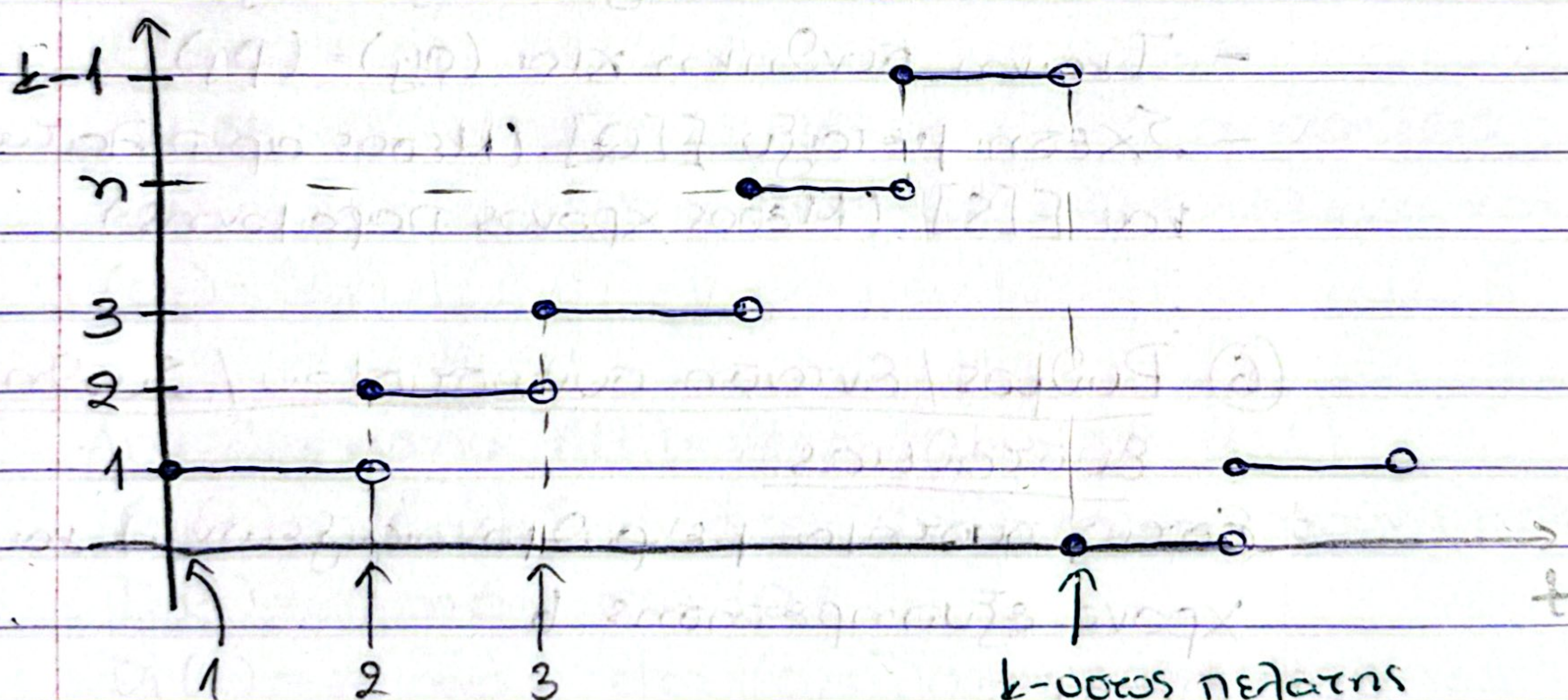
$$P_n = \begin{cases} 0,9 & , n=0 \\ 0,1 & , n=1 \\ 0 & , n \geq 2 \end{cases}$$

$$\delta_n = \alpha_n = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

④ Παράδειγμα 2: Ένα βανόκι

Πελάτες έρχονται σύμφωνα με διαδ. Poisson  
 ρυθμού  $\lambda$ . ( $\text{Exp}(\lambda)$  ενδιάμ. χρόνοι αφίξης)

Αναχωρούν βανόκια κάθε φορά που  
 συμπληρώνονται  $k$  πελάτες



~~$P_n$~~   $P_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & , 0 \leq n \leq k-1 \\ 0 & , n \geq k \end{cases}$

↳ ποσοστό χρόνου που  
 στο σύστημα βρίσκονται  
 $n$  πελάτες

$$p_n = \frac{E[\text{χρονος } n \text{ πελατων σε 1 ευκατω}]}{E[\text{διορκεια ευκατω}]} \leftarrow \frac{1}{\lambda} \text{ αν } n=0,1,\dots,k-1$$

$$E[\text{διορκεια ευκατω}] \leftarrow k \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 0 \leq n \leq k-1 \\ 0, & n \geq k \end{cases}$$

↳ ποσοδος πελατων που φηαινουνται βλεπονυν η πελ.

$$d_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

Εδω  $(p_n) = (\alpha_n)$  Αλλα  $(d_n) \neq (\alpha_n)$   
 $\neq (p_n)$

#### ⑤ 4 βασικα αποτελεσματα

- Χαρακτηριστος ευσταθειας  $G/G/c$
- Ικανη συνθηκη για  $(\alpha_j) = (d_j)$
- Ικανη συνθηκη για  $(\alpha_j) = (p_j)$
- Σχηση μεταξυ  $E[Q]$  (Μεσος αρ. πελατων) και  $E[S]$  (Μεσος χρονος παρατονης)

#### ⑥ Ρυθμος / ενταση συνωδουστου / συνθηκη ευσταθειας

Εστω συστημα με ρυθμο αριξεων  $\lambda$  και μεσο χρονο εξυπηρετησης  $b$

Ορισμος:

$$\rho = \lambda \cdot b = \text{Ρυθμος συνωδουστου}$$

↳ Μεση ερχασια / λεητο

↳ Μεση ποσοτητα ερχασιας που διεκπεραιωνεται ανα χρονικη μοναδα

### Θεωρήματα

Εστω  $G/G/c$  σύστημα με κατανομή ενδιαίτητων χρόνων αφίξεων ή εξυπηρέτησεων με συνεχές μέρος. Τότε:

(i)  $\rho < c \Rightarrow$  Σύστημα ευσταθές

δηλ  $\exists (a_j), (d_j), (p_j)$  με

$$\sum_j a_j = \sum_j d_j \text{ και } \sum_j p_j = 1$$

(ii)  $\rho \geq c \Rightarrow$  Σύστημα ασταθές

δηλ  $a_j = d_j = p_j = 0$

### Παρατηρήση

Στο  $D/D/c$  έχουμε  $\rho \leq c$  ευσταθές και στο

$\rho > c$  σύστημα ασταθές

### (\*) Ιδιότητα Μεμονωμένων Αφίξεων και Αναχωρήσεων

#### Θεωρήματα

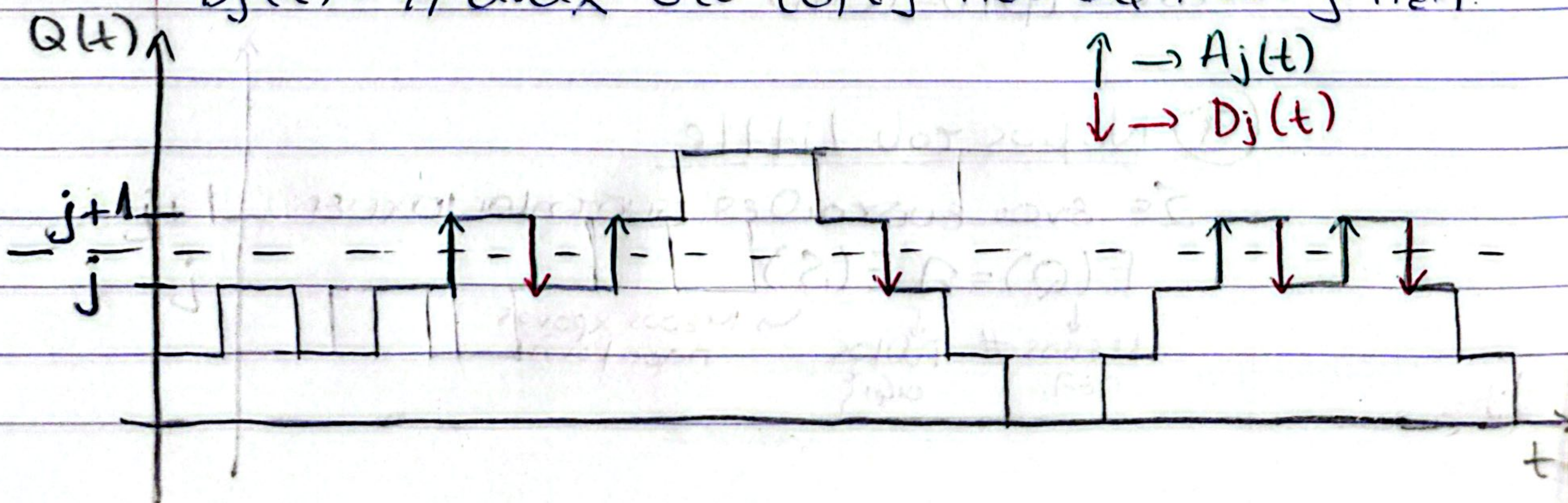
Αν σε ένα ευσταθές σύστημα εξυπ, οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμένα τότε  $(a_j) = (d_j)$

Αιτιολόγηση:  $A(t) = \# \text{ αφίξεων στο } (0, t]$

$A_j(t) = \# \text{ αφίξεων στο } (0, t] \text{ που βρίσκουν } j \text{ ηελ.}$

$D(t) = \# \text{ αναχ. στο } (0, t]$

$D_j(t) = \# \text{ αναχ. στο } (0, t] \text{ που αβήνουν } j \text{ ηελ.}$



$$a_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} \text{ και } d_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$$

Έχουμε:

$$\triangleright \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} \approx \text{Ρυθμός αφίξεων}$$

||

$$\triangleright \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t)}{t} \approx \text{Ρυθμός αναχωρ.}$$

Αρχή Διατήρησης Πελατών

Αιτιολόγηση: Επειδή οι αφίξεις-αναχωρ. γίνονται μεμονωμένα έχουμε:

$$|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1$$

(Τα  $\uparrow \downarrow$  που διασχίζουν την ευθεία ορίζονται)

Τα  $j, j+1$  εμφανίζονται εναλλάξ από αυτό το σημείο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_j(t)}{t}$$

$$\text{Αρα: } a_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D_j(t)}{D(t)} = d_j$$

### ⑧ Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Αν σε ένα σύστημα έλθουν οι αφίξεις γίνονται

σύμφωνα με τη διαδ. Poisson, το μέλλον ως προς

δεν εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος

$$\text{τότε } (p_n) = (a_n)$$

### ⑨ Νόμος του Little

Σε ένα ευσταθές σύστημα ισχύει:

$$E(Q) = \lambda \cdot E(S)$$

↓  
Μέσος # πελ.

↓  
Ρυθμός αφίξ.

↪ Μέσος χρόνος παραμονής