πχ $g_j = \begin{cases} 1/2 & , j=1 \\ 1/2 & , j=2 \end{cases}$ $\qquad \tilde{g}_j = \begin{cases} 3/4 & , j=1 & 2/3 \\ 1/4 & , j=2 & 1/3 \\ 0 & , διαφ. \end{cases}$

19/11/24

Μέθοδος Πιθανογεννητριών για συστήματα με ομαδικές αφίξεις

(1) Κατανομή του πλήθους πελατών σε στιγμές άφιξης πελατών

$\tilde{g}_n$ = ποσοστό πελατών που είναι n-οστοί στην ομάδα τους

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\#\text{ πελατών που είναι } n\text{-οστοί στις } N \text{ ομάδες}}{\#\text{ πελατών στις } N \text{ ομάδες}} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{\sum_{i=1}^{N} Y_i}$$

όπου Y_i = μέγεθος της i-ομάδας, $X_i = 1_{\{Y_i \geq n\}}$

Λόγω PASTA: $a_k^{group} = p_k$

Επίσης $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^{group} \tilde{g}_{n-k+1}$

Άρα, $$\tilde{g}_n = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i/N}{\sum_{i=1}^{N} Y_i/N} \underset{\text{ΝΜΑ}}{=} \frac{E[X_i]}{E[Y_i]} = \frac{Pr[Y_i \geq n]}{\sum_{k=1}^{\infty} k g_k} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} g_k}{\sum_{k=1}^{\infty} k g_k}$$

(2) Παραδείγματα

1) Ομάδες σταθερού μεγέθους K

$$g_k = \begin{cases} 1 & , \text{αν } k=K \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\tilde{g}_n = \begin{cases} 1/K & , 1 \leq n \leq K \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$$ (ομοιόμορφη στο $\{1,2,\dots,K\}$)

2|

$$g_k = \begin{cases} 1/2, & k=1 \\ 1/2, & k=2 \\ 0, & k\geq 3 \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k g_k = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} g_k = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 1/2, & n=2 \\ 0, & n\geq 3 \end{cases}$$

Άρα $\tilde{g}_n = \begin{cases} 2/3, & n=1 \\ 1/3, & n=2 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

3| Ομάδες γεωμετρικού μεγέθους

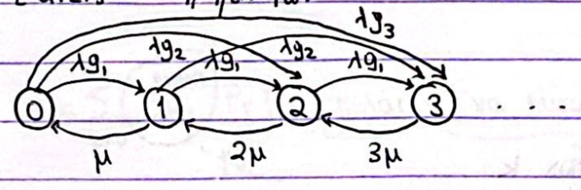
$g_k = (1-a)a^{k-1}, \ k\geq 1$

$\tilde{g}_n = ;$

(3) Η M|M|∞ με ομαδικές αφίξεις $(M^x/M/\infty)$

- Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων ρυθμού λ
- $(g_k : k\geq 1)$ σ.π μεγέθους ομάδων
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρέτησης
- ∞ υπηρέτες

$\{Q(t)\}$ ~ # πελατών



Εξ. Ισορροπίας: $\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (1)$

$$(\lambda + n\mu)p_n = (n+1)\mu p_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k} p_k \quad , n\geq 1 \ (2)$$

$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad , |z| \le 1$

↑

άγνωστη

$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k \quad , |z| \le 1$

↑

γνωστή

Στόχος: Προσδιορισμός της $P(z)$ συναρτήσει $\lambda, \mu, G(z)$

Μέθοδος Πιθανοτ.: $(1) \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n$

$$\Rightarrow \lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + n\mu) p_n z^n = \mu p_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\mu p_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k} p_k z^n$$

$$\Leftrightarrow \lambda P(z) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k}}_{j=n-k}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j = G(z)$$

$$\Rightarrow \lambda P(z) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} z^n + \lambda G(z) P(z) \quad (*)$$

Έχω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \xRightarrow{d/dz} P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^{n-1}$

και $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}$

Άρα η $(*)$ γίνεται: $\lambda P(z) + \mu z P'(z) = \mu P'(z) + \lambda G(z) P(z)$

$\Leftrightarrow \lambda (1 - G(z)) P(z) = \mu (1-z) P'(z)$

$\Leftrightarrow \dfrac{P'(z)}{P(z)} = \dfrac{\lambda (1 - G(z))}{\mu (1-z)}$

$\dfrac{d}{dz}(\log P(z)) = \dfrac{\lambda (1 - G(z))}{\mu (1-z)}$

$\log \overset{1}{\underset{\shortparallel}{P(1)}} - \log \overset{>0}{P(z)} = \int_z^1 \dfrac{\lambda (1 - G(u))}{\mu (1-u)} du$

$\Rightarrow \boxed{P(z) = e^{-\int_z^1 \frac{\lambda (1 - G(u))}{\mu (1-u)} du}}$

$$E[Q] = P'(1) = e^{-\int_z^1 \frac{\lambda(1-G(u))}{\mu(1-u)} du} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \lim_{z\to 1} \frac{1-G(z)}{1-z} = \frac{\lambda G'(1)}{\mu} = \frac{\lambda m}{\mu}$$

μέσο μέγεθος ομάδας

Με Little: $E[Q]$ = Ρυθμός αφίξεων πελατών · Μέσος χρόνος παραμονής

$$= \lambda m \cdot 1/\mu$$

→ Ειδική περίπτωση 1 : $g_j = \begin{cases} 1 & , j=1 \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases}$ (ομάδες μεγ. 1)

Τότε $G(z) = z$. Άρα $P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)}$

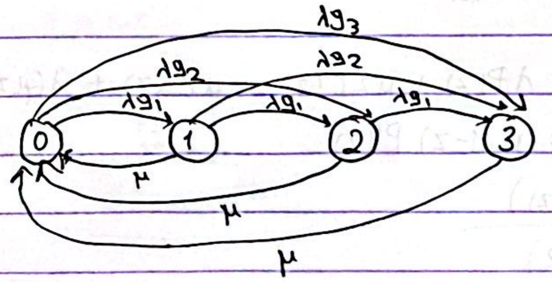
$$\Rightarrow P(z) = e^{-\lambda/\mu} e^{\lambda z/\mu} = e^{-\lambda/\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda z}{\mu}\right)^n$$

Άρα $p_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$ $n = 0,1,2,\dots$ $Q \sim Poisson\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

(4) Το σύστημα με ομαδικές αφίξεις και ολικές εκκαθαρίσεις

- Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων ρυθμού λ
- $(g_k : k \geq 1)$ σ.π μεγ. ομάδων
- $Exp(\mu)$ χρόνος εκκαθ.

$\{Q(t)\}$



Εξ. Ισορρ: $\lambda p_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu p_j$ (1)

$$(\lambda+\mu)p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k} p_k \quad , n \geq 1 \quad (2)$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \qquad G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$$

$$(1) + \sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n \Rightarrow \lambda p_0 + (\lambda+\mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \sum_{j=1}^{\infty} \mu p_j + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k} p_k z^n \Rightarrow$$

$$(\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \mu(1-p_0) + \lambda G(z) P(z) \Rightarrow$$
$$(\mu + \lambda(1-G(z))) P(z) = \mu$$

$$\boxed{P(z) = \frac{\mu}{\mu + \lambda(1-G(z))}}$$

$$E[Q] = P'(1) = \ldots$$

ή με Little:

$$E[Q] = \lambda m \cdot \frac{1}{\mu}$$

$\uparrow$ μέσο μέγεθος ομάδας

Ειδική περίπτωση 1: Μεμονωμένες Αφίξεις

$$g_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} \Rightarrow G(z) = z$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Άρα $P(z) = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)} = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z} = \dfrac{\frac{\mu}{\mu+\lambda}}{1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} z} = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n z^n$

Άρα $p_n = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n, \ n \geq 0$

$$\left(Q \sim \text{Geom}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \text{ στο } \{0,1,2,\ldots\} \right)$$