$$p_n = \begin{cases} B & , n=0 \\ B\,\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} & , n\geq 1 \end{cases}$$

12/11/24

Γενικές Μαρκοβιανές Ουρές

(1) Ορισμός

Σύστημα εξυπηρέτησης είναι Μαρκοβιανή Ουρά $\Leftrightarrow$ $\{Q(t)\}$ ΜαΣΧ. (# πελατών)

→ Τέτοια συστήματα προκύπτουν όταν έχω ομαδικές αφίξεις και/ή αναχωρήσεις με Exp ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων και εξυπηρέτησης.

Κύριο Εργαλείο: Πιθανογεννήτριες

(2) Η M/M/1 με ομαδικές αφίξεις ($M^X/M/1$)

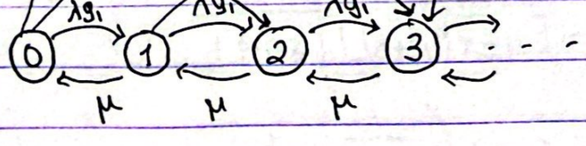
- Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων ρυθμού λ.
- (g_k) σ.π. μεγ. ομάδας
  $g_k = Pr[$αφικν. ομάδα έχει μέγεθος $k]$, $k\geq 1$
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα ∞
- FCFS

Ανάλυση

$Q(t)$ = # πελατών τη στιγμή t

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	k, $k\geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
n, $n\geq 1$	$n+k$, $k\geq 1$	$Exp(\lambda g_k)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

όλα Exp $\Downarrow$ $\{Q(t)\}$ ΜαΣΧ



Έστω (p_n) η κατανομή ισορροπίας της $\{Q(t)\}$

Εξ. ισορροπίας: $\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (1)$

$$(\lambda+\mu) p_n = \mu p_{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda g_{n-j} p_j \quad , n \geq 1 \quad (2)$$

Έστω $\underset{\text{άγνωστη}}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad , |z| \leq 1. \qquad \underset{\text{γνωστή}}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$

$(1) \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n$

$$\Rightarrow \lambda p_0 + (\lambda+\mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \mu p_1 + \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} g_{n-j} p_j z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \frac{\mu}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1}}_{P(z) - p_0} + \lambda P(z) G(z) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \underbrace{\sum_{n=j+1}^{\infty} g_{n-j} z^{n-j}}_{\sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k \,=\, G(z)}$$

$$(\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \frac{\mu}{z}\left(P(z) - p_0\right) + \lambda G(z) P(z)$$

$$\overset{z}{\Rightarrow} [(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z G(z)] P(z) = \mu p_0 (z-1)$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu p_0 (z-1)}{(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z G(z)}$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης : $p(1) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\mu p_0}{\lambda+\mu-\lambda-\lambda G'(z)} \quad \Rightarrow p_0 = \frac{\mu - \lambda G'(z)}{\mu} = 1 - \frac{\lambda \overset{\text{Μέσο μέγεθος ομάδας}}{m}}{\mu} \qquad G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k g_k$$

Τελικά: $$P(z) = \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda m}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z G(z)}$$

Γενικά: $E[Q] = P'(1)$

$$\underbrace{E[Q\cdot(Q-1)\cdots(Q-k+1)]}_{k-\text{παραγοντ. ροπή}} = P^{(k)}(1)$$

$$p_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0$$

(3) Υπολογισμοί (p_n) για μεμονωμένες αφίξεις

$$g_j = \begin{cases} 1, & j=1 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} \Rightarrow G(z) = z$$

$$m=1$$

Άρα, $$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z^2} = \frac{\cancel{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\cancel{(z-1)}}{\cancel{\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}z\right)\cancel{(z-1)}} =$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}z} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n z^n \Rightarrow p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n\geq 0.$$

(4) Υπολογισμοί (p_n) για ομάδες γεωμετρικού μεγέθους

$$g_j = (1-a)a^{j-1}, \ j\geq 1 \Rightarrow$$

$$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty}(1-a)a^{j-1}z^j = \frac{(1-a)z}{1-az} \qquad m = G'(1) = \frac{1}{1-a}$$

Άρα $$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z\frac{(1-a)z}{1-az}}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(z-1)(1-az)}{(1-az)[(\lambda+\mu)z-\mu]-\lambda z(1-a)z} =$$

$$= \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(z-1)(1-az)}{\underbrace{(\lambda+\mu)z-\mu-a(\lambda+\mu)z^2+\mu a z-\lambda z^2+\lambda a z^2}}$$

$\hookrightarrow (z-1)(\mu-\lambda z-\mu a z)$

Άρα, $P(z) = \dfrac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{(1-\alpha)\mu}\right)(1-az)}{\mu-\lambda z-\mu a z} = \dfrac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)z}\right)(1-az)}{\mu\left(1-\frac{\lambda+\mu a}{\mu}z\right)} =$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(1-az)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^k z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^k z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)a\left(\frac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^k z^{\overset{n}{\overset{\shortparallel}{(k+1)}}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)\left(\frac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^n z^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)a\left(\frac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^{n-1} z^n$$

$$\Rightarrow p_n = \begin{cases} 1-\dfrac{\lambda}{(1-a)\mu}, & n=0 \\[2ex] \left(1-\dfrac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda+\mu a}{\mu}\right)^{n-1}\left(\dfrac{\lambda+\mu a}{\mu}-a\right), & n\geq 1 \end{cases}$$

(5) Υπολογισμός a_n στο $M^X/M/1$

a_n = πιθανότητα ένας αφικνυόμενος πελάτης να βρει n

= πιθανότητα να μπει στη θέση $n+1$.

a_n^{group} = πιθανότητα μια αφικνυόμενη ομάδα να βρει n πελάτες.

$$a_n^{group} \overset{PASTA}{=} p_n$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underset{p_k}{a_k^{group}}\, \underbrace{Pr[\text{ο πελάτης να είναι ο } (n-k+1)\text{-οστός στην ομάδα του}]}_{\tilde{g}_{n-k+1}}$$

όπου $\tilde{g}_k$: η πιθανότητα να είμαι ο k-οστός στην ομάδα μου.

πχ $g_j = \begin{cases} 1, & j=3 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$ $\quad \tilde{g}_j = \begin{cases} 1/3, & j=1,2,3 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$