07/11/24

(1) $M/M/c/c$ ουρά (μοντέλο απωλειών Erlang)

- Poisson διαδ. αφίξεων ρυθμού λ
- Εκθετικούς μ χρόνους εξυπηρέτησης
- c υπηρέτες
- όχι χώρος αναμονής ($\Leftrightarrow$ χωρητ. c)

$\{Q(t)\}$:

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n,\ 1\le n\le c-1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$
c	$c-1$	$Exp(c\mu)$

Max

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] & \cdots \arrow[r, bend left] & c-1 \arrow[l, bend left, "(c-1)\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & c \arrow[l, bend left, "c\mu"] \end{tikzcd}$$

Πάντα ευσταθής.

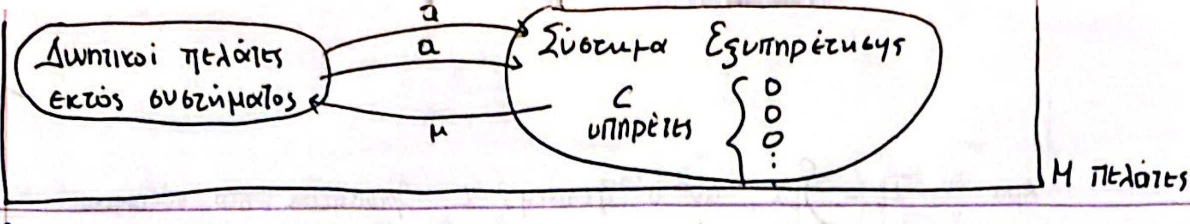
$$\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{\mu^n \cdot n!} = \frac{\rho^n}{n!}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\rho^n}{n!} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Άρα} \quad p_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!}} \qquad 0\le n\le c$$

Ποσοστό χαμένων πελατών: $B(c,\rho) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PASTA}}}{a_c = p_c} = \dfrac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!}}$
(Erlang - B formula)

(2) Μοντέλο του Engset

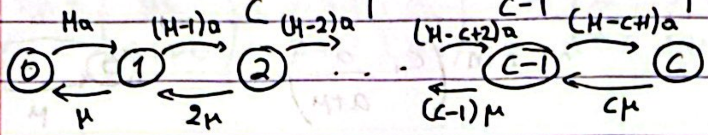
- Πεπερ. πλήθος δυνητικών πελατών M
- Κάθε δυνητικός πελάτης γεννά απαιτήσεις εξυπηρέτησης κάθε $Exp(a)$ χρονικές μονάδες όταν δε βρίσκεται στο σύστημα.
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- C υπηρέτες
- c χωρητικότητα $\Leftrightarrow$ όχι χώρος αναμονής



$\{Q(t)\}$:

Κατάσταση	Επομ. Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(M\cdot a)$
n, $1\le n\le c-1$	$n+1$	$Exp((M-n)a)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$
c	$c-1$	$Exp(c\mu)$

Μαρκ.



$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{M(M-1)(M-2)\cdots(M-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{a}{\mu}\right)^n = \binom{M}{n}\left(\frac{a}{\mu}\right)^n \qquad 1\le n\le c$$

$$p_n = \frac{\binom{M}{n}\left(\frac{a}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=0}^{c}\binom{M}{k}\left(\frac{a}{\mu}\right)^k} = \frac{\frac{(a+\mu)^M}{\mu^M}\binom{M}{n}\left(\frac{a}{a+\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{a+\mu}\right)^{M-n}}{\frac{(a+\mu)^M}{\mu^M}\sum_{k=0}^{c}\binom{M}{k}\left(\frac{a}{a+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{a+\mu}\right)^{M-k}} \qquad 0\le n\le c$$

$$B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{c}\binom{M}{n}\left(\frac{a}{\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^{c}\binom{M}{n}\left(\frac{a}{\mu}\right)^n$$

Truncated Binomial $\left(M, \frac{a}{a+\mu}\right)$ στο $\{0,1,\dots,c\}$

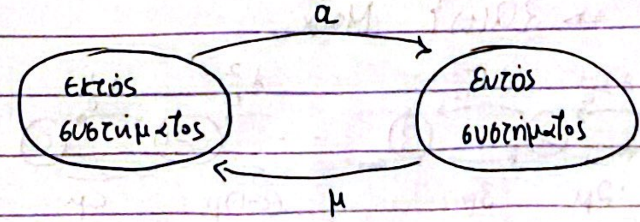
⇝ Όταν M μεγάλο και a μικρό ώστε $Ma=\lambda$ $\approx$ $M/M/c/c$

→ Στην ειδική περίπτωση $M=c$

$$p_n = \binom{c}{n}\left(\frac{a}{a+\mu}\right)^n\left(\frac{\mu}{a+\mu}\right)^{c-n} \qquad 0\le n\le c$$

Ερμηνεία: Όταν $M=c$ κάθε πελάτης δεν αλληλεπιδρά με τους υπόλοιπους. Για την κατάσταση του πελάτη έχω

Μαρκ.



πιθανότητα πελάτη εντός συστήματος $= \frac{a}{a+\mu}$

Άρα $I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πελάτης } i \text{ βρίσκεται στο σύστημα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$i = 1, 2, \ldots, c$ ανεξ.

$$Q = \#\text{ πελατών στο σύστημα} = \sum_{i=1}^{c} I_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{a}{a+\mu}\right) \qquad 0 \le n \le c$$

$$\sim \text{Bin}\left(c, \frac{a}{a+\mu}\right)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "a"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

(3) Ασκ. 4.9

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- c υπηρέτες
- χωρητικότητα c
- αποθαρρυνόμενοι πελάτες

1) $(p_n) = ;$

2) ποσοστό χαμένων πελατών $= ;$

3) $(D_n^{enter}), (d_n^{enter}) = ;$

4) $E[S] = ;$ $E[S^{enter}] = ;$

5) $E[Z] = ;$ κύκλος απασχόλησης

πιθανότητα άμεσης αναχώρησης πελάτη που βρίσκει n $= \frac{n}{c}$ $\quad 0 \le n \le c$

Λύση:

$Q(t) = \#$ πελατών

κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
n, $1 \le n \le c-1$	$n+1$	$Exp\left(\lambda\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$
c	$c-1$	$Exp(c\mu)$

Όλα Exp $\Rightarrow \{Q(t)\}$ Μαρκ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c}{c}"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c-1}{c}"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c-2}{c}"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \; \cdots & c-1 \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{1}{c}"] \arrow[l, bend left, "(c-1)\mu"] & c \arrow[l, bend left, "c\mu"] \end{tikzcd}$$

1| $\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \dfrac{\overbrace{c(c-1)(c-2)\dots(c-n+1)}^{\frac{c!}{(c-n)!}}\lambda^n}{n!\,\mu^n c^n} = \binom{c}{n}\left(\dfrac{\lambda}{\mu c}\right)^n$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{c}\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^n = \sum_{n=0}^{c}\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^n = \left(1+\frac{\lambda}{\mu c}\right)^c$$

$$p_n = \left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^c \binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)^n = \binom{c}{n}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)^n\left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^{c-n} \quad 0\le n\le c$$

$$(p_n) \sim \text{Binomial}\left(c, \frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)$$

2| Ποσοστό χαμένων πελατών = πιθανότητα να αποχωρήσει άμεσα ένας αφικνούμενος πελάτης $= \sum_{n=0}^{c} a_n\cdot\frac{n}{c} =$

$$\underset{\text{PASTA}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n\frac{n}{c} = \frac{1}{c}E[Q] = \frac{1}{\cancel{c}}\cancel{c}\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}.$$

Εναλλακτικά: $\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{c}\lambda\left(1-\frac{n}{c}\right)p_n =$

$$= \lambda - \frac{\lambda}{c}\sum_{n=0}^{c} n p_n = \lambda - \frac{\lambda}{c}E[Q] = \lambda - \frac{\lambda}{c}\cdot c\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}$$

Ποσοστό χαμένων πελατών $= \dfrac{\lambda-\lambda^*}{\lambda} = \dfrac{\cancel{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}}{\cancel{\lambda}}.$

3| $a_n^{enter} = \dfrac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \dfrac{\cancel{\lambda}\left(1-\frac{n}{c}\right)\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)^n\left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^{\cancel{c-n}\ c-n-1}}{\cancel{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)}$, $\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right) = \dfrac{\mu c}{\lambda+\mu c}$

$$= \frac{c-n}{n}\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)^n\left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^{c-n-1}$$

$$= \frac{c-n}{n}\cdot\frac{c!}{(c-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)^n\left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^{c-n-1}$$

$$= \binom{c-1}{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)^n\left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^{c-1-n} \quad 0\le n\le c-1$$

$$(a_n^{enter}) \sim Binom\left(c-1,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu c}\right)$$

$$a_n^{enter} = d_n^{enter} = \frac{\mu_{n+1}\, p_{n+1}}{\mu^*} = \frac{(n+1)\,\mu\, p_{n+1}}{\mu^*} = \dots$$

↑ Ιδιότητα μεμον. αφίξεων

4) $$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{c\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}}{\lambda} = \frac{c}{\lambda+\mu c}$$

ή

$$E[S] = \sum_{n=0}^{c} a_n\left(\frac{n}{c}\cdot 0 + \frac{c-n}{c}\cdot\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\overset{\text{PASTA}\ \ E[Q]}{E[Q^-]}}{c}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\frac{\lambda c}{\lambda+\mu c}}{c}\right)$$

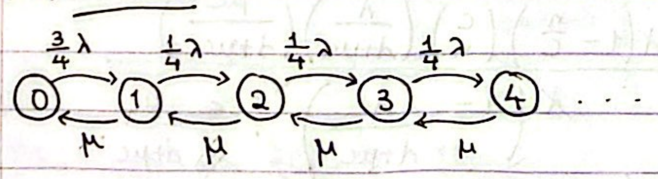
$$= \frac{c}{\lambda+\mu c}$$

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{c\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu c}}{\frac{\lambda\mu c}{\lambda+\mu c}} = \frac{1}{\mu}$$

5) $$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow \left(\frac{\mu c}{\lambda+\mu c}\right)^c = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]}$$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda+\mu c}{\mu c}\right)^c$$

(4) Άσκ. 4.7



$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad n\geq 1$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 + \frac{3\lambda}{4\mu}\,\frac{1}{1-\frac{\lambda}{4\mu}}$$

$$p_n = \begin{cases} B & , n=0 \\ B\,\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} & , n\geq 1 \end{cases}$$