(4) Ασκήσεις

4.6 – 4.10

05/11/24

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

– Μοντέλα με 1 υπηρέτη έναντι μοντέλων με πολλούς υπηρέτες.

(1) Η M/M/1 ουρά με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

- Poisson διαδ. αφίξεων ρυθμού λ.
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης → Όσο στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες ο υπηρέτης εργάζεται με ταχύτητα v_n.
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS

Έστω

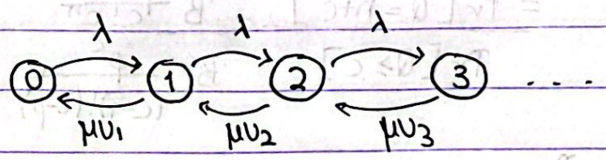
- ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι X.
- Αν ο υπηρέτης εργάζεται με ταχύτητα v_n τότε ο πραγματικός χρόνος για την διεκπεραίωση του X είναι X/v_n.
- $X \sim Exp(\mu) \Rightarrow Pr[X \le x] = 1 - e^{-\mu x}, x > 0$

$$\Rightarrow Pr\left[\frac{X}{v_n} \le y\right] = Pr[X \le v_n y] = 1 - e^{-\mu v_n y}, y > 0 \quad \frac{X}{v_n} \sim Exp(\mu v_n)$$

$Q(t) = \#$ πελατών

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \ge 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu v_n)$

Όλα Exp $\Downarrow$ $\{Q(t)\}$ Μαδχ



Ενδιαφέρουσες Ειδικές Περιπτώσεις

1) $v_n = \min(n, c)$ → περίπου M/M/c
2) $v_n = n$ → περίπου M/M/∞
3) $v_n = \begin{cases} v_1, & \text{αν } n \le k \\ v_2, & \text{αν } n \ge k+1 \end{cases}$

(2) Η M/M/c ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- c υπηρέτες
- χωρητικότητα ∞
- FCFS

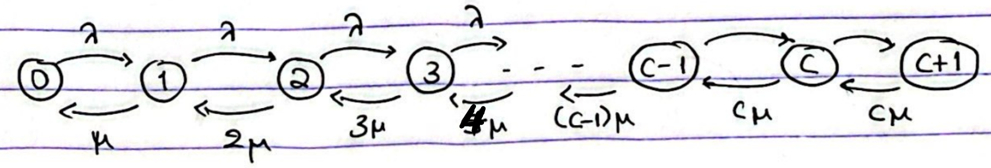
$\{Q(t)\}$

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n,\ 1 \le n \le c-1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$
$n,\ n \ge c$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(c\mu)$

όλα Exp

$\Downarrow$

$\{Q(t)\}$ Μαρκ.



$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}, & n<c \\ \dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}, & n\geq c \end{cases}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \underbrace{\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}}_{\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c \cdot c}{c!\,(c-\rho)}$$

$$p_n = \begin{cases} B\,\dfrac{\rho^n}{n!}, & n\leq c-1 \\ B\,\dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}, & n\geq c \end{cases}$$

→ Τύπος καθυστερήσεων του Erlang = Erlang-C formula =

= Πιθανότητα αναμονής σε M/M/C =

$$= \Pr[Q \geq c] = \sum_{n=c}^{\infty} a_n \underset{\uparrow \text{ PASTA}}{=} \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \underbrace{B\,\frac{\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)}}_{C(c,\rho)}.$$

$$\Pr[Q_q = n \mid \overset{\text{όλοι οι υπηρέτες}}{\text{είναι απασχολημένοι}}] = \Pr[Q_q = n \mid Q\geq c] = \Pr[Q = n+c \mid Q\geq c] =$$

$$= \frac{\Pr[Q=n+c]}{\Pr[Q\geq c]} = \frac{\cancel{B}\,\frac{\rho^{n+c}}{c!\,c^n}}{\cancel{B}\,\frac{\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)}} =$$

$$= \frac{c-\rho}{c}\left(\frac{\rho}{c}\right)^n = \left(1-\frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^n$$

Άρα $(Q_q \mid Q\geq c) \sim Geom\left(\frac{\rho}{c}\right)$ στο $\{0,1,\dots\}$

Scanned with CamScanner

$$E[Q_q] = Pr[Q<c]\cancel{E[Q_q | Q<c]}^{\to 0} + Pr[Q \geq c] E[Q_q | Q \geq c] =$$

$$= B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

$$E[W] = \frac{E[Q_q]}{\lambda} = B \frac{\rho^c}{\mu(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

↑ N. Little

$$E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu}$$

$$E[Q] = B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2} + \rho$$

(3) <u>Τύποι για $E[S]$, $E[W]$ στις M/M/1 και M/M/2 ουρές</u>

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ M/M/1: $E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

M/M/2: $E[S] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}$

$$\left(B^{-1} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2-\rho} = \frac{(1+\rho)(2-\rho)+\rho^2}{2-\rho} = \frac{2+\rho}{2-\rho} \right)$$

$$E[W] = \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}$$

(4) <u>Ένας γρήγορος ή δύο αργοί υπηρέτες</u>

① M/M/1 (λ, 2μ) έναντι ② M/M/2 (λ, μ)

(1 υπηρέτης ~ Exp(2μ)) (2 υπηρέτες ~ Exp(μ))

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$E[S^{(1)}] = \frac{1}{2\mu(1-\frac{\rho}{2})} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}$$

Scanned with CamScanner

$$E[S^{(2)}] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}$$

$$\rightsquigarrow \frac{E[S^{(1)}]}{E[S^{(2)}]} = \frac{\frac{1}{\mu(2-\rho)}}{\frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}} = \frac{2+\rho}{4}$$

$\rho \in (0,2)$ λόγω ευστάθειας

$$\in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Άρα για μικρά ρ υπερέχει σαφώς το (1) για τον E[S].

$$E[W^{(1)}] = \frac{\frac{\rho}{2}}{2\mu(1-\frac{\rho}{2})} = \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)}$$

$$E[W^{(2)}] = \frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}$$

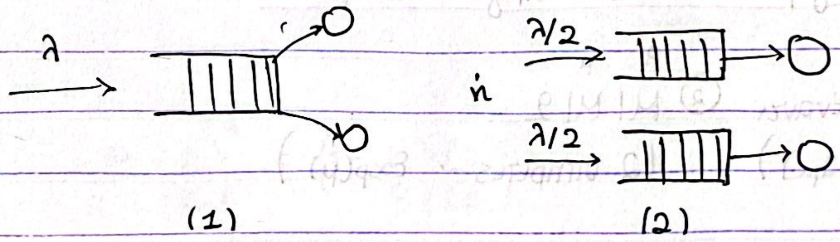
$$\frac{E[W^{(1)}]}{E[W^{(2)}]} = \frac{\frac{\rho}{2\mu(2-\rho)}}{\frac{\rho^2}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}} = \frac{2+\rho}{2\rho}$$

$\rho \in (0,2)$ λόγω ευστάθειας

$$= \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \in (1, \infty)$$

Για μικρά ρ υπερέχει σαφώς το (2) για τον E[W].

(5) <u>Κοινή ουρά (polling) ή ουρά ανά υπηρέτη</u>



$$E[S^{(1)}] = \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}$$
$$E[S^{(2)}] = \frac{1}{\mu(1-\frac{\rho}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{E[S^{(1)}]}{E[S^{(2)}]} = \frac{\frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}}{\frac{2}{\mu(2-\rho)}} = \frac{2}{2+\rho} \in (1/2, 1)$$

$\rho \in (0,2)$ λόγω ευστάθειας

→ Για μεγάλα ρ (υψηλό συνωστισμό) υπερέχει το polling (κοινή ουρά)