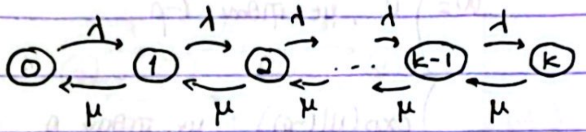
Τροποποιήσεις στη M/M/1 ουρά

31/10/24

(1) Η M/M/1/k ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ.
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα k
- FCFS
- $\{Q(t)\}$ Μαρκ



$\rightsquigarrow$ Ο χ.κ πεπερασμένος, άρα πάντα ευσταθές.

- $\dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n \qquad 1 \le n \le k \quad$ με $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

- $$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{k} \rho^k = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}, & \rho \neq 1 \\ k+1, & \rho = 1 \end{cases}$$

- $$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, & n \ge 1 \end{cases} = B\rho^n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Αν $\rho = 1 \rightsquigarrow (p_n) \sim$ Discrete Unif$(\{0,1,\dots,k\})$

$\rho \neq 1 \rightsquigarrow (p_n) \sim$ Truncated Geom

$\rightarrow$ Αν $\rho = 1$: $E[Q] = \sum_{n=0}^{k} n \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k}{2}$

$\rightarrow$ Αν $\rho \neq 1$: $E[Q] = \sum_{n=0}^{k} n \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}} = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} n\rho^n$

Όμως, $$\sum_{n=0}^{k} t^n = \frac{1-t^{k+1}}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{k} n t^{n-1} = \frac{-(k+1)t^k(1-t) + (1-t^{k+1})}{(1-t)^2}$$

$$\overset{\cdot t}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{k} n t^n = \frac{-(k+1)t^{k+1} + k t^{k+2} + t}{(1-t)^2}$$

Άρα $$E[Q] = \frac{k\rho^{k+2} - (k+1)\rho^{k+1} + \rho}{(1-\rho^{k+1})(1-\rho)}$$

$\overset{\text{PASTA}}{d_n = a_n = p_n}$

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \begin{cases} 0, & n=k \\ \dfrac{p_n}{1-p_k}, & n=0,1,\dots,k-1 \end{cases}$$

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n p_n = \lambda(1-p_k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(1-\rho^k)}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{\lambda k}{k+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$d_n^{enter} = a_n^{enter}$$

$E[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}$, $p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda p_0} = \begin{cases} \frac{1-\rho^{k+1}}{\lambda(1-\rho)} & , \rho \neq 1 \\ \frac{k+1}{\lambda} & , \rho = 1 \end{cases}$$

N = # πελατών που εξυπηρετούνται σε 1 κύκλο λειτουργίας.

$\lambda^* = \frac{E[N]}{E[Z]}$

$\lambda(1-p_k)$ $\quad \frac{1}{\lambda p_0}$

Άρα: $E[N] = \frac{1-p_k}{p_0}$

(2) Η M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες (balking)

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρ.
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα ∞
- FCFS

- Κάθε αφικνούμενος πελάτης που βρίσκει n άλλους στο σύστημα αποχωρεί άμεσα με πιθαν. q_n , $q_n \uparrow$

$\{Q(t)\}$

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda(1-q_0))$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda(1-q_n))$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

⇝ Κατανομή χρόνου μέχρι την είσοδο πελάτη όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες.

$T = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $X_i \sim Exp(\lambda)$ ανεξ. και $N \sim Geom$: $Pr[N=k] = (1-q_n)\, q_n^{k-1}$, $k \geq 1$

$$Pr[T \le x] = \sum_{k=1}^{\infty} Pr[N=k]\, Pr[T \le x \mid N=k]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-q_n)\, q_n^{k-1} \int_0^x \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du$$

$$= \int_0^x \lambda(1-q_n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda q_n u)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda u}\, du = \int_0^x \lambda(1-q_n) e^{-\lambda(1-q_n)u}\, du$$

Άρα $T = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda(1-q_n))$

Άρα $\{Q(t)\}$ Μαδχ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda(1-q_0)"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda(1-q_1)"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda(1-q_2)"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda(1-q_3)"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ειδική περίπτωση: $q_n = \frac{n}{n+1}$, $1-q_n = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda/2"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda/3"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda/4"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty \rightsquigarrow \underline{\text{πάντα ευσταθής}}$$

Έχουμε: $\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{n!}\rho^n$, $n \ge 1$.

Στάσιμη $\Rightarrow$ $p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, & n \ge 1 \end{cases} = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$, $n \ge 0$

$Q \sim Poisson(\rho)$ Άρα $E[Q] = \rho$

$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$

χρόνος παραμονής αφικνούμενων (όχι εισερχόμενων)

Ρυθμός εξυπηρετούμενων πελατών = Ρυθμος εισερχόμενων πελατών = Ρυθμός Διαπέρασης

$$\underset{\mu^*}{\parallel} \qquad\qquad \underset{\lambda^*}{\parallel}$$

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} = \lambda e^{-\rho} \frac{1}{\rho} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}}_{e^{\rho}-1} = \frac{\lambda(1-e^{-\rho})}{\rho} = \mu(1-e^{-\rho})$$

Εναλλακτικά,

$$\lambda^* = \mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \mu(1-p_0) = \mu(1-e^{-\rho})$$

$$d_n = a_n = p_n$$

↑ μεμονωμ. μεταβ. ↑ PASTA

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$$

$$\parallel$$

$$d_n^{enter} = \frac{\mu_{n+1} p_{n+1}}{\mu^*} = \frac{\cancel{\mu} e^{-\rho} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}}{\cancel{\mu}(1-e^{-\rho})} = \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}, n \geq 0$$

Ποσοστό χαμένων πελατών = Πιθανότητα να αποχωρήσει ένας πελάτης $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{Pr[\text{αποχωρ.} \mid \text{βρήκα } n]}_{q_n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1-\frac{1}{n+1}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}}_{1} - \frac{e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Ποσοστό χαμένων πελατών} = 1 - \frac{1-e^{-\rho}}{\rho} = \frac{\lambda-\lambda^*}{\lambda} = \frac{\lambda-\mu(1-e^{-\rho})}{\lambda} = 1 - \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}$$

χρόνος παραμ. εισερχ. $E[S^{enter}] = ;$

1ος: N. Little : $E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*} = \frac{\rho}{\mu(1-e^{-\rho})} = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}$

2ος: Από το E[S]

$$E[S] = \underbrace{Pr[\text{μπαίνω}]}_{=\frac{\lambda^*}{\lambda}}\ \underbrace{E[S|\text{μπαίνω}]}_{E[S^{enter}]} + Pr[\text{δεν μπαίνω}]\ E[S|\ \cancel{\text{δεν μπαίνω}}]$$

$$\Rightarrow E[S^{enter}] = \frac{\lambda E[S]}{\lambda^{enter}} = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}$$

3ος: Δέσμευση στο πόσους βλέπει όποιος μπαίνει

$$E[S_{enter}] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{enter}\,\frac{n+1}{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} \cdot \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{\mu}$$

Οπότε, $$E[S^{enter}] = \frac{\cancel{e^{-\rho}}\rho}{(1-e^{-\rho})\mu}\ \cancel{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}}$$

(3) Η M/M/1 με ανυπόμονους πελάτες (reneging)

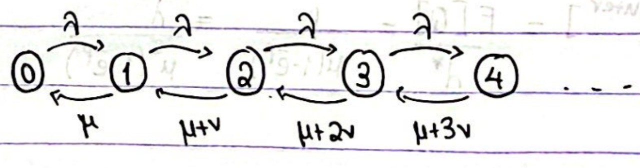
- Poisson διαδ. αφιξ. ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπ.
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητ.
- FCFS

- Κάθε πελάτης έχει $Exp(\nu)$ χρόνο υπομονής όσο είναι στην ουρά. (στον χώρο αναμονής)

$\{Q(t)\}$

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu+(n-1)\nu)$

$\{Q(t)\}$ Μαδχ



(14) Ασκήσεις

4.6 – 4.10