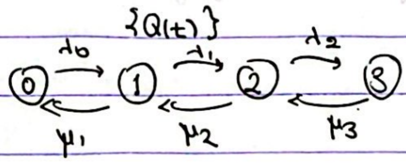
29/10/24

(1) Οριακοί

Σύστημα εξυπηρέτησης $\iff \{Q(t)\}$ ← # πελατών

είναι Απλή Μαρκοβ. Ουρά Μαδχ τύπου Γέννησης – Θανάτου

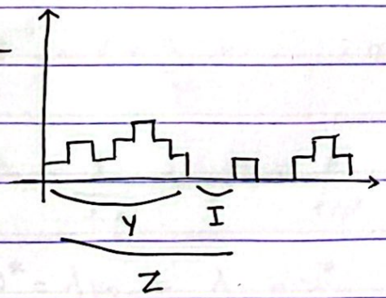


(2) Μέτρα απόδοσης – Μοντελοποίηση

- Λεκτική περιγραφή ~ λ_n, μ_n
- $(p_n) = ;$, $p_n = \lim_{t\to\infty} Pr[Q(t)=n] = Pr[Q=n]$
- λ^* : Ρυθμός διαπέρασης , Ρυθμός πραγμ. εισόδων
- μ^* : Ρυθμός αναχωρήσεων
- $(a_n), (d_n);$ $a_n = Pr[\overset{-}{Q}=n]$ ← # πελ. πριν από άφιξη , $d_n = Pr[\overset{+}{Q}=n]$ ← # πελατών μετά από άφιξη
- $E[Q] = ;$
- $E[S] = ;$ → χρόνος παραμονής πελάτη

- $F_S(x) = Pr[S \le x]$

-



N = # πελατών που εξυπηρετούνται σε 1 κύκλο απασχόλησης

$E[I], E[Z], E[Y] = ;$

(3) Υπολογισμοί

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$$ → $<\infty$: Ευσταθές ; → $=\infty$: Ασταθές

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, & n\geq 1 \end{cases}$$

Υπενθύμιση

c_i : κόστος παραμονής στην i ανά χρονική μονάδα

d_{ij} : κόστος μετάβασης $i \to j$

Ρυθμός κόστους : $\sum_j p_j c_j + \sum_i \sum_{j \neq i} p_i q_{ij} d_{ij}$

$$\lambda^* = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \lambda_i$$

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mu_i$$

a_n = Μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που βλέπουν μπαίνοντας n

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\text{\# εισερχόμενων πελατών στο } (0,t] \text{ που βρίσκουν } n] \; :t}{E[\text{\# εισερχόμενων πελατών στο } (0,t]] \; :t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\text{Ρυθμός εισερχόμενων πελατών στο } (0,t] \text{ που βλέπουν } n}{\text{Ρυθμός εισερχόμενων πελατών στο } (0,t]}$$

$$= \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$$

$$d_n = \frac{\mu_{n+1} p_{n+1}}{\mu^*}$$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

$$E[S] = \frac{1}{\lambda^*} E[Q]$$

Για την $F_S(x)$ παίζει σημαντικό ρόλο πάντα η πειθαρχία.

Υπό την FCFS, η ιδέα είναι να δεσμεύσουμε στην Q^-

$$F_S(x) = Pr[S \le x] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Pr[S \le x \mid Q^- = n]$$

$$E[I] = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda_0 p_0}, \quad E[Y] = E[Z] - E[I].$$

(4) Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων / PASTA

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

$\lambda_n p_n = B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \lambda_n = B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n+1}} \mu_{n+1} = p_{n+1} \mu_{n+1}$

$\lambda^* = \mu^*$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \dfrac{\mu_{n+1} p_{n+1}}{\mu^*} = d_n$

- Poisson αφίξεις $\Rightarrow \lambda_n = \lambda \Rightarrow a_n = \dfrac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \dfrac{\lambda p_n}{\lambda} = p_n$

(5) M/M/1/1

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα 1

$\{Q(t)\}$ $\quad 0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 1$

$p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$

$B^{-1} = 1 + \dfrac{\lambda}{\mu} = 1 + \rho < \infty$: Πάντα ευσταθής

$p_0 = \dfrac{1}{1+\rho}$, $p_1 = \dfrac{\rho}{1+\rho}$

$\lambda^* = \lambda p_0 = \dfrac{\lambda}{1+\rho} = \mu^*$

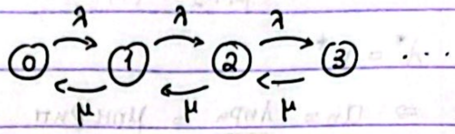
$a_n \overset{PASTA}{=} p_n \begin{cases} 1/1+\rho, & n=0 \\ \rho/1+\rho, & n=1 \end{cases}$ $\qquad a_n^{enter} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=1 \end{cases}$

$\uparrow$ πιθανότητα βλέπει n ένας αφικνούμενος $\qquad$ $\uparrow$ πιθανότητα βλέπει n ένας εισερχ. πελάτης

$E[S^{enter}] = 1/\mu \qquad E[S] = a_0 \dfrac{1}{\mu} + a_1 \cdot 0 \overset{PASTA}{=} p_0 \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu(1+\rho)}$

(6) M|M|1

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρ.
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα : ∞
- FCFS



$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}}_{\rho^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \text{αν } \rho<1 \sim \text{ευσταθές} \\ \infty, & \text{αν } \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, & n \geq 1 \end{cases} = (1-\rho)\rho^n, \ n \geq 0$$

$p_n = a_n = d_n$ $\qquad E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$

$\uparrow$

$\lambda_n = \lambda$

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{Pr[S \leq x \mid Q^- = n]}_{\text{σ.κ Erlang}(n+1,\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^x \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du$$

$$= \int_0^x (1-\rho)\mu \underbrace{\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu u)^n}{n!}}_{e^{\rho\mu u}} e^{-\mu u}}_{e^{-\mu(1-\rho)u}} du \Rightarrow S \sim Exp(\mu(1-\rho))$$

χρόνος αναμονής στην ουρά

$$F_W(x) = \underbrace{Pr[Q^- = 0]}_{1-\rho} \cdot \underbrace{Pr[W \leq x \mid Q^- = 0]}_{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^- = n]}_{(1-\rho)\rho^n} \underbrace{Pr[W \leq x \mid Q^- = n]}_{\text{σ.κ Erlang}(n,\mu)}$$

$$= 1-\rho + \rho \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{n-1} \int_0^x \frac{\mu^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\mu u} du}_{} =$$

$\longrightarrow$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \int_0^x \frac{\mu^{k+1}}{k!} u^k e^{-\mu u} du}_{} \sim Exp(\mu(1-\rho))$$

$$W = \begin{cases} 0 & , \text{με πιθαν } 1-\rho \\ Exp(\mu(1-\rho)) & , \text{με πιθαν. } \rho \end{cases}$$

$$E[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-\rho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

N = # πελατών που εξυπηρετούνται σε 1 κύκλο λειτουργίας.

$$E[N] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ρυθμός} \\ \text{εξυπηρ.}}}{\mu}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μέση περίοδος} \\ \text{συνεχούς λειτουργίας}}}{E[Y]} = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\lambda = \frac{E[N]}{E[Z]} \Rightarrow E[N] = \lambda E[Z] = \lambda \frac{1}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{1-\rho}.$$

$$E[N] = 1 + \overset{\lambda E[X]}{\overset{\shortparallel}{\rho}} \cdot E[N] \Rightarrow E[N] = \frac{1}{1-\rho}.$$