Παράδειγμα 3

- M/M/2

Ίδια λ, μ κλπ

Κατάσταση	Επόμενη Κατάστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
1	2	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu)$
2 $(n \geq 2)$	3 $(n+1)$	$Exp(\lambda)$
	1 $(n-1)$	$Exp(2\mu)$

Όλα Exp οπότε $\{Q(t)\}$ Μαοχ.

24/10/24

Μαοχ

Οριακή Θεωρία

(1) Ορισμοί

$\{X(t): t \geq 0\}$ με χ.κ S αριθμήσιμο είναι Μαοχ με πίνακα ρυθμών $Q = (q_{ij})$.

$(q_{ij} \geq 0,\ j \neq i \quad q_{ii} \leq 0,\ q_i = -q_{ii})$

Ορσ.1.

$\Leftrightarrow Pr[X(t+h) = j \mid X(u): 0 \leq u < t,\ X(t) = i] = Pr[X(t+h) = j \mid X(t) = i]$

$$= p_{ij}(h) = \begin{cases} q_{ij} h + o(h) & , j \neq i \\ 1 - q_i h + o(h) & , j = i \end{cases} , \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Ορσ.2

$\Leftrightarrow$ Η $\{X(t)\}$ μένει σε κάθε κατάσταση i για $Exp(q_i)$ χρόνο και μετά μεταβαίνει σε μια $j \neq i$ με πιθαν. $\frac{q_{ij}}{q_i}$

Ορσ.3

$\Leftrightarrow$ Κάθε φορά που η $\{X(t)\}$ επισκέπτεται μια κατάσταση i ξεκινούν $T_{ik} \sim Exp(q_{ik})$ $k \neq i$ (ρολόγια/ξυπνητήρια) και ο χρόνος παραμονής στην i είναι $\min_{k \neq i} T_{ik}$ και η επόμενη κατάσταση είναι η j:

$$T_{ij} = \min_{k \neq i} T_{ik}$$

(2) Εξισώσεις Ισορροπίας

Αν $p_{ij}(t) = Pr[X(t)=j \mid X(0)=i]$ είδαμε ότι $P'(t) = P(t)Q$

$$p_{ij}'(t) = -p_{ij}(t)q_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj} \quad i,j\in S$$

Για $t\to\infty$ περιμένουμε:

$$0 = -p_j q_j + \sum_{k\neq j} p_k q_{kj} \quad , j\in S$$

Ισοδύναμα,

$$p_j q_j = \sum_{k\neq j} p_k q_{kj} \quad , j\in S : \text{ εξισώσεις ισορροπίας}$$

(3) Αδιαχώριστη Μαδχ

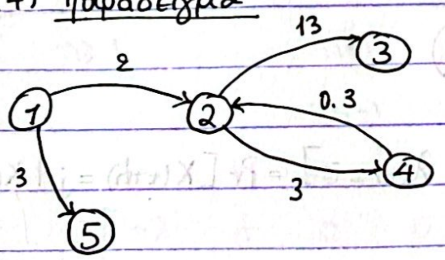
Έστω $\{X(t)\}$ Μαδχ με πίνακα $Q=(q_{ij})$.

Αν $\forall i,j \quad \exists i_1, i_2, \dots, i_n$:

$q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n j} > 0$

τότε η $\{X(t)\}$ λέγεται αδιαχώριστη.

(4) Παράδειγμα



$\lim_{t\to\infty} p_{13}(t) = \frac{2}{5}$ ενώ $\lim_{t\to\infty} p_{23}(t) = 1$, $\lim_{t\to\infty} p_{53}(t) = 0$

→ Άρα όταν η αλυσίδα δεν είναι αδιαχώριστη οι οριακές πιθανότητες εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση.

(5) Εργοδικό Θεώρημα Μαρκ

Έστω αδιαχώριστη Μαρκ $\{X(t)\}$ με χ.κ S και πίνακα ρυθμών $Q=(q_{ij})$.

Αν το σύστημα εξ. ισορροπίας

$$p_j q_j = \sum_{k \neq j} p_k q_{kj} \quad j \in S$$

μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in S} p_j = 1.$$

έχει μη-αρνητική λύση, τότε αυτή είναι μοναδική.

Επίσης:

$$p_j = \lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = Pr[X(t)=j \mid X(0)=i]$$

$$= \lim_{t \to \infty} p_j(t) = Pr[X(t)=j]$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)=j\}\, du\right]}{t}$$: Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου στην j.

$$= \frac{1/q_j}{E\left[\begin{matrix}\text{χρόνος από είσοδο στην } j \\ \text{ως την επόμενη είσοδο στη } j\end{matrix}\right]}$$

↝ Η $\underline{p} = (p_j)$ λέγεται <u>οριακή στάσιμη κατανομή</u> ή <u>κατανομή ισορροπίας</u> της $\{X(t)\}$

Το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας + κανονικοποίησης γράφεται

$$\underline{p}^T Q = \underline{0}^T.$$

και $$\underline{p}^T \underline{e} = 1, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots \\1\end{bmatrix}$$

(6) Ερμηνείες Ποσοτήτων

p_j = Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου στη j $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E[\text{Χρόνος παραμ. στη } j \text{ στο } [0,t]]}{t}$

q_{ij} = Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβολής προς την j για κάθε χρονική μονάδα παραμονής στην i $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E[\#\text{ μεταβάσεων } i\to j \text{ στο } [0,t]]}{E[\text{χρόνος παραμονής στην } i \text{ στο } [0,t]]}$

Άρα, $p_j q_{ij}$ = Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων $i\to j$ $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E[\#\text{ μεταβ. } i\to j \text{ στο } [0,t]]}{t}$

Εξισώσεις Ισορροπίας

$$p_j q_j = \sum_{k\neq j} p_k q_{kj}$$

$$q_j = \sum_{k\neq j} q_{jk}$$

$$\underbrace{\sum_{k\neq j} p_j q_{jk}}_{} = \underbrace{\sum_{k\neq j} p_k q_{kj}}_{}$$

Μακροπρόθεσμος ρυθμός εξόδων από την j — Μακροπρόθεσμος ρυθμός εισόδων στην j

(7) Ρυθμός κόστους που επάγει μια ΜαΔΧ

Πλαίσιο:

$\{X(t)\}$ ΜαΔΧ αδιαχώριστη, πίνακα ρυθμών Q και κατανομή ισορροπίας $\underline{p} = (p_j)$.

Δομή κόστους:

c_j : κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής στη j

d_{ij} : κόστος ανά μετάβαση τύπου $i\to j$.

Θεώρημα

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $= \sum_{j\in S} p_j c_j + \sum_{i\in S}\sum_{j\neq i} p_i q_{ij} d_{ij}$

(8) Εξισώσεις Ισορροπίας έναντι Εξισώσεων Γενικευμένης Ισορροπίας

Εξισώσεις (πλήρους) Ισορροπίας

$$\underbrace{p_j q_j}_{\text{ρυθμός εξόδων από την } j} = \underbrace{\sum_{i\neq j} p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός εισόδων στην } j} \qquad j\in S$$

Εξίσωση γενικευμένης ισορροπίας

$$\underbrace{\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c} p_j q_{ji}}_{\text{ρυθμός εξόδων από } A} = \underbrace{\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός εισόδων στο } A}$$

Ισχύουν πάντα όταν $\exists$ κατανομή ισορροπίας.

(9) ΜαΔΧ τύπου Γέννησης - Θανάτου

Έστω $\{X(t)\}$ ΜαΔΧ με χ.κ $S=\{0,1,2,\dots\}$ και πίνακα ρυθμών $Q=(q_{ij})$.

Αν $q_{ij}=0$ για $|i-j|>1$ τότε λέγεται διαδικασία γέννησης - θανάτου.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_3"] \arrow[r, bend left, "\lambda_3"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu_4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

← ρυθμοί γεννήσεων

← ρυθμοί θανάτων

Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \\ (\lambda_1+\mu_1)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\ (\lambda_2+\mu_2)p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 & \leftarrow A=\{0\} \\ \lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 & \leftarrow A=\{0,1\} \\ \lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3 & \leftarrow A=\{0,1,2\} \\ \vdots \end{cases}$$

Άρα $p_n = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\mu_n}\, p_0 \qquad n\geq 1.$

Για να ικανοποιείται και η εξίσωση κανονικοποίησης πρέπει

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$\Leftrightarrow p_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right) = 1$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$$

$\to < \infty \Rightarrow \exists\ (p_n)$ ευστάθεια

$\to = \infty \Rightarrow \nexists\ (p_n)$

Όταν $B^{-1} < \infty$

$$p_n = \begin{cases} B, & n = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

(10) Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Ορισμός: Έστω σύστημα εξυπηρέτησης $\Leftrightarrow \{Q(t)\}$ είναι

Απλή Μαρκοβιανή Ουρά Μαρκ. τύπου γέννησης-θανάτου.

πελατών

(11) Ρυθμός αφίξεων / αναχωρήσεων / διαπέρασης / throughput)

$\lambda^* =$ ρυθμός εισόδων πελατών

$\mu^* =$ ρυθμός εξόδων πελατών

$$\lambda^* = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[\text{άφιξη στο } (t, t+h]]}{h}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Pr[Q(t)=n]\, Pr[\text{άφιξη στο } (t, t+h] \mid Q(t)=n]}{h}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda_n$$

Ομοίως: $\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$