ΜΑΣΧ - Επισκόπηση 22/10/24

(1) Ορισμός

$\{X(t) : t \geq 0\}$ Μαςχ $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \exists S: \text{αριθμήσιμο} : P(X(t) \in S) = 1 \ , \forall t \geq 0 \\ \text{ii) } \forall t, s > 0 : P[(X+t) = j \mid X(u): 0 \leq u < t, X(t) = i] = \\ = P[X(t+s) = j \mid X(t) = i] = p_{ij}(s) \end{cases}$

Όταν η τελευταία πιθανότητα είναι ανεξάρτητη του t τότε λέμε ότι η $\{X(t)\}$ είναι ομογενής.

→ Από εδώ και πέρα Μαςχ ≡ Ομογενής Μαςχ.

(2) Βασικά Στοιχεία Μαςχ

Οι Μαςχ χαρακτηρίζονται από

i) $\underline{p}(0) = (p_j(0) : j \in S)$: αρχική κατάσταση

$p_j(0) = P[X(0) = j] \ , j \in S$

ii) $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$: πίνακας ρυθμών μεταβολής

$$q_{ij} = p_{ij}'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(X(h) = j \mid X(0) = i)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{p_{ij}(h)}{h}, & j \neq i \\ \lim_{h \to 0^+} \dfrac{p_{ii}(h) - 1}{h}, & j = i \end{cases}$$

$p_{ij}(h) = q_{ij}(h) + o(h) \quad j \neq i$

$p_{ii}(h) = q_{ii} h + o(h)$

$q_i = -q_{ii}$: ρυθμός εξόδου από την i.

(3) <u>Βασικοί Υπολογισμοί</u>

i) $\underline{p}(t) = (p_j(t) : j\in S)$: Μεταβατική κατανομή

$$p_j(t) = Pr[X(t)=j], \quad j\in S$$

ii) $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t) : j\in S)$: Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης σε χρόνο t.

Έχουμε:

$$p_j(t) = \sum_{i\in S} p_i(0)\, p_{ij}(t) \Rightarrow \underline{p}(t)^T = \underline{p}(0)^T\, \mathbb{P}(t)$$

~> Σύνδεση Q με τον $\mathbb{P}(t)$:

Θεωρώ την εξέλιξη της $\{X(t)\}$ στο $[0, t+h] = [0,t] \cup [t, t+h]$ και μετά $h\to 0^+$

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)\, p_{kj}(h)$$

$$= p_{ij}(t)\, p_{jj}(h) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(k)\, p_{kj}(h)$$

$$= p_{ij}(t)(1-q_j h) + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\, q_{kj}(h) + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -p_{ij}(t)\, q_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\, q_{kj} + \frac{o(h)}{h}$$

$$\overset{h\to 0^+}{\Rightarrow} p'_{ij}(t) = \overbrace{-p_{ij}(t)\, q_j}^{=q_{jj}} + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\, q_{kj}$$

$$= \sum_{k\in S} p_{ik}(t)\, q_{kj}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\cdot Q \Rightarrow \mathbb{P}(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n t^n}{n!}$$

$(x'(t) = x(t)a)$

(4) Χρόνοι παραμονής σε καταστάσεις και πιθανότητες μετάβασης

1| Έστω $X(0) = i$

T_i = χρόνος παραμονής στην i

$= \inf\{t \geq 0 : X(t) \neq i\}$

$T_i \sim$;

$Pr[t < T_i \leq t+h \mid T_i > t] = Pr[X(t+h) \neq i \mid X(s) = i, s \leq t] + o(h)$

$= Pr[X(t+h) \neq i \mid X(t) = i] + o(h)$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{Pr[t < T_i \leq t+h \mid T_i > t]}{h}$: $\lambda_{T_i}(h)$ ⤳ Βαθμίδα αποτυχίας της T_i στο t

ή κινδύνου

ή Ρυθμός βλάβης

(hazard/failure rate)

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{Pr[X(t+h) \neq i \mid X(t) = i]}{h} = q_i$

$\Rightarrow \dfrac{F'_{T_i}(t)}{1 - F_T(t)} = q_i \quad \Rightarrow \dfrac{(1 - F_T(t))'}{1 - F_T(t)} = -q_i \quad \Rightarrow$

$\dfrac{d}{dt} \log(1 - F_{T_i}(t)) = -q_i$

$\log(1 - F_{T_i}(t)) - \log(\cancel{1 - F_{T_i}(0)}^{\to 0}) = -q_i t$

$F_{T_i}(t) = 1 - e^{-q_i t}, \; t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T_i \sim Exp(q_i)$

2| Πιθανότητα μετάβασης προς την j μετά το πέρας ενός χρόνου παραμονής στην i.

$= \lim\limits_{h \to 0^+} Pr[X(t+h) = j \mid X(t) = i, X(t+h) \neq i]$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{Pr[X(t+h) = j, X(t) = i, X(t+h) \neq i]}{Pr[X(t) = i, X(t+h) \neq i]}$

$= \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\cancel{Pr[X(t) = i]}\, \overbrace{Pr[X(t+h) = j \mid X(t) = i]}^{P_{ij}(h)}/h}{\cancel{Pr[X(t) = i]}\, Pr[X(t+h) \neq i \mid X(t) = i]/h}$

$= \dfrac{q_{ij}}{q_i}$.

Θεώρημα: Αν $\{X(t)\}$ Μαδχ με πίνακα ρυθμών Q τότε:

i) σε κάθε κατάσταση i παραμένει $Exp(q_i)$ χρόνο

ii) όντας στην i η επόμενη κατάσταση j επιλέγεται με πιθανότητα $\frac{q_{ij}}{q_i}$ $j \neq i$.

(5) Περιγραφή Μαδχ με "πολλαπλά ρολόγια"

Υπενθυμίσεις από τ.μ Exp.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ.

$X_j \sim Exp(\lambda_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim Exp\left(\sum_k \lambda_k\right)$$

$$Pr[\min(X_1, \dots, X_n) = X_j] = \frac{\lambda_j}{\sum_k \lambda_k}$$

- Μπορούμε να σκεφτούμε το προηγούμενο Θεώρημα ως εξής:

Σε κάθε κατάσταση i "τρεχαν" χρόνοι $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$ $j \neq i$ (ρολόγια ή ξυπνητήρια)

και η $\{X(t)\}$ αφήνει την i όταν χτυπήσει το πρώτο ρολόι και μεταβαίνει στην κατάσταση που αντιστοιχεί το ρολόι.

(6) Παράδειγμα 1

Έστω διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ.

$X(t) = \#$ αφίξεων μέχρι τη στιγμή t.

$\{X(t)\}$ Μαδχ; Αν ναι $Q = ;$ $p(0) = ;$

- Χώρος καταστάσεων (χ.κ) $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ αριθμήσιμο

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
$n \geq 0$	$n+1$	$T_{n,n+1} \sim Exp(\lambda)$

Όλα Exp

Άρα Μαδχ

Αν $X(0)=0$ τότε $p_j(0) = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j\neq 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Παράδειγμα 2

- M/M/1 ουρά
- λ: ρυθμός αφίξεων
- μ: ρυθμός εξυπηρέτησης

$Q(t) = \#$ πελατών

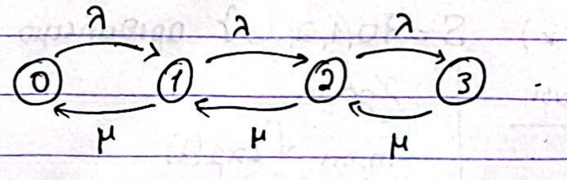
χ.κ $S = \{0,1,2,\dots\}$ αριθμ.

κατάσταση	Επόμενη κατ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

Όλα Exp οπότε $\{Q(t)\}$ Μαρκ.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

$-$(το άθροισμα)



Παράδειγμα 3

- M/M/2

Ίδια λ,μ κλπ

Κατάσταση	Επόμενη Κατάστ.	Χρόνος
0	1	Exp(λ)
1	2	Exp(λ)
	0	Exp(μ)
2 (n≥2)	3 (n+1)	Exp(λ)
	1 (n−1)	Exp(2μ)

Όλα Exp

οπότε $\{Q(t)\}$ Μαρκ.