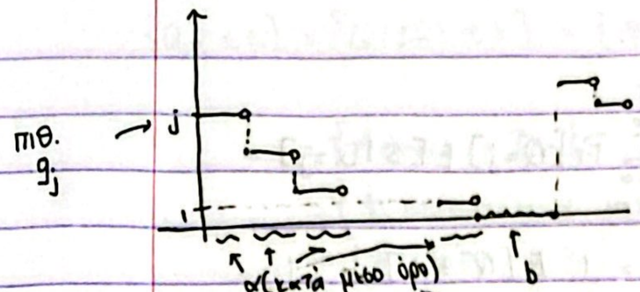



$$p_0 = \frac{b}{\sum_{j=1}^{\infty} g_j\, ja + b} = \frac{b}{E[G]a+b}$$

μέγεθος ομάδας

$Pr$[η παρτίδα έχει μέγεθος j]

$$E\left[\sum_{i=1}^{G} X_i + Y\right] =$$

χρόνος επεξεργ. — περίοδος αργίας

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{Pr[G=j]}_{g_j}\, E\left[\sum_{i=1}^{j} X_i + Y\right]$$

$$p_j = \frac{\overbrace{Pr[G\geq j]a}^{\sum_{k=j}^{\infty} g_k \cdot a}}{\sum_{j=1}^{\infty} g_j\, ja + b} = \frac{Pr[G\geq j]a}{E[G]a+b}, \quad j\geq 1.$$

$$d_j = \frac{\text{Ρυθμός αναχωρήσεων που αφήνουν } j}{\text{Ρυθμός αναχωρήσεων}} = \frac{\sum_{k=j+1}^{\infty} g_k}{\sum_{j=1}^{\infty} j\, g_j} = \frac{Pr[G\geq j+1]}{E[G]}.$$

17/10/24

(1) Άσκ. 1.4

- G/M/1
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρ.
- $a_j = (1-a)a^j \quad , j\geq 0$

πιθαν. j πελάτες σε στιγμή άφιξης

i) E[# πελατών που βρίσκει ένας αφικν.] = $E[Q^-]$ = ;

ii) E[ χρόνος παραμονής πελάτη που βρίσκει j] = ; = $E[S \mid Q^- = j]$

iii) E[ χρόνος παραμονής] = ; = $E[S]$

Λύση: $E[Q^-] = \sum_{j=0}^{\infty} j\, Pr[Q^-=j] = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-a)a^j$

Όμως $\sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} j t^{j-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \overset{t=a}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} j a^{j-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \overset{\cdot a(1-a)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow E[Q^-] = \frac{a}{1-a}$

ii) $E[S|Q^-=j] = (j+1)\frac{1}{\mu}$

iii) $E[S] = E[E[S|Q^-]] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^-=j]\, E[S|Q^-=j] =$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1-a)a^j (j+1)\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} E[Q^-+1] = \frac{1}{\mu(1-a)}$$

(2) <u>Ασκ. 1.5</u>

- M/G/1/1
- $\lambda$: ρυθμός αφίξεων
- $b$: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
- $\rho = \lambda b$
- $(p_j) =\ ;$

<u>Λύση</u>: $E[Q] = \lambda E[S]$

$$\Rightarrow 1p_1 + 0\cdot p_0 = \lambda\Big(a_0 \underbrace{E[S|Q^-=0]}_{b} + a_1 \underbrace{E[S|Q^-=1]}_{0}\Big)$$

$$\Rightarrow p_1 = \lambda b a_0 = \rho a_0 \overset{PASTA}{=} \rho p_0$$

Επίσης $p_0 + p_1 = 1$

Άρα $1 - p_0 = \rho p_0 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\rho}$, $p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$

(3) <u>Ασκ. 1.6</u>

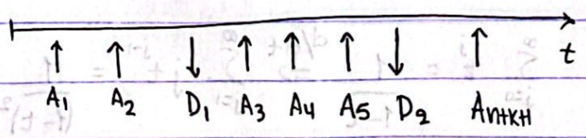
- $Q_n^-$ = # πελατών που βρίσκει ο n-οστός αφικν. πελάτης

  $Q_n^+$ = # πελατών που αφήνει ο n-οστός αφικν. πελάτης
- Αρχικά κενό σύστημα

i) <u>Νδο</u> $\{Q_n^+ \le k\} = \{Q^-_{n+k+1} \le k\}$

ii) <u>Νδο</u> $a_j = d_j \;\; \forall j$ (ιδιότητα μεμονωμένης μεταβλητής)

<u>Λύση</u>: i) $\{Q_n^+ \le k\}$



$\{Q_n^+ \le k\} = \{Q(D_n^+) \le k\} = \{\#$ αφίξεων μέχρι τη στιγμή $D_n$ είναι το πολύ $n+k\} =$

$= \{A_{n+1+k} > D_n\}$

$= \{\#$ αναχωρήσεων μέχρι τη στιγμή $A^-_{n+k+1}$ είναι τουλ. $n\}$

$= \{Q(A^-_{n+k+1}) \le k\} = \{Q^-_{n+1+k} \le k\}$

ii) Από (i): $Pr[Q^-_{n+1+k} \le k] = Pr[Q_n^+ \le k]$

$\xrightarrow{\lim_{n\to\infty}} Pr[Q^- \le k] = Pr[Q^+ \le k]$

$\Rightarrow \sum_{j=k}^{\infty} a_j = \sum_{j=k}^{\infty} d_j \quad \forall k$

$\Rightarrow a_j = d_j$

(4) Άσκ. 1.7

- Διαδικασία αφίξεων Poisson ($\lambda$)
- $\lambda = 5$ πελάτες/λεπτό
- Πεπερασμένη χωρητικότητα $k$.
- $p_k = 0.2$
- $E[Q] = 4$ # αφικνούμενα

Μέσος χρόνος παραμονής εισερχόμενου πελάτη;

χρόνος παραμονής αφικνούμενου

Λύση: N. Little ⇝ $E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow 4 = 5E[S] \Rightarrow E[S] = 0.8$ λεπτ.

$E[S] = \underbrace{Pr[\text{Μπήκε}]}_{Q^- < k}\, \underbrace{E[S \mid \text{Μπήκε}]}_{\text{Μέσος χρόνος παραμ. εισερχ.}} + \underbrace{Pr[\text{Δεν μπήκε}]}_{Q^- = k}\, \underbrace{E[S \mid \text{Δεν μπήκε}]}_{0}$

$\Rightarrow 0.8 = E[S] = (1-a_k)\, E[S^{enter}]$

$\overset{PASTA}{=} (1-\underbrace{p_k}_{0.2})\, E[S^{enter}]$

$\Rightarrow E[S^{enter}] = 1$ λεπτό.

Εναλλακτικά, N. Little: $\underbrace{E[Q]}_{4} = \lambda^{enter} E[S^{enter}]$

$\lambda^{enter} = \lambda(1-a_k) \overset{PASTA}{=} \lambda(1-p_k) = 5 \cdot 0.8$

$\Rightarrow 4 = 4E[S^{enter}] \Rightarrow E[S^{enter}] = 1$ λεπτ.

(5) Ασκ. 1.8

- G/G/∞
- Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων a
- Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b
- $E[Q] = ;$

Λύση: N. Little ⇝ $E[Q] = \underset{1/a}{\lambda} \underset{b}{E[S]} = b/a$

(6) Ασκ. 1.9

- M/M/c ουρά
- $\lambda = 5$ πελάτες/ώρα : Ρυθμός αφίξεων
- $b = 78$ λεπτά : Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

i) Ελάχιστο # υπηρετών c ώστε ευσταθές;

ii) — // — , αν επιβάλλεται ποσοστό χρόνου απασχ. υπηρ. ≤ 80%

Μονάδα χρόνου = 1 ώρα   $\lambda = 5$   $b = 78/60 = 1.3$ ώρες

i) $c > \rho = \lambda b = 5 \cdot 1.3 = 6.5$

Άρα $C_{min} = 7$ για ευστάθεια

ii) Ποσοστό χρόνου απασχόλησης υπηρετών $= \frac{\rho}{c} \leq 0.8$

$\Rightarrow c \geq \frac{\rho}{0.8} = \frac{6.5}{0.8} = \frac{65}{8}$   Άρα $C_{min} = 9$ για 80% απασχόληση.

(7) Ασκ. 1.10

- Διαδικασία αφίξεων Poisson(λ)
- $\lambda = 10$ πελάτες/λεπτό
- Πεπερασμένη χωρητικότητα $k = 9$
- $p_k = p_9 = 0.8$
- $E[Q] = 8$
- $E[S] = ;$   $E[S^{enter}] = ;$

Λύση: $E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow E[S] = \frac{4}{10}$ λεπτά.

$$E[Q] = \lambda^{enter} E[S^{enter}] \Rightarrow E[S^{enter}] = \frac{4}{2} = 2 \text{ λεπτά}$$

$$\lambda^{enter} = \lambda \Pr[\text{Μπαίνει}] = \lambda(1-a_K) \overset{\text{PASTA}}{=} \lambda(1-p_K) = 10 \cdot 0.2$$

(8). Ασκ. 4.1

- 1 υπηρέτης $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- Δύο τύποι πελατών 1 και 2
- Διαδικασία αφίξεων πελατών 1 Poisson $(\lambda_1)$ } ανεξ.
  — // — 2 —/— $(\lambda_2)$
- Απόλυτη προτεραιότητα των τύπου 1 έναντι των τύπων 2.
- $E[Q_1]$, $E[Q_2]$ =;

  $E[Q_1]$: # πελατών τύπου 1, $E[Q_2]$: # πελατών τύπου 2

Λύση: Για τους τύπου 1 οι τύπου 2 δεν υπάρχουν

Άρα $Q_1$ = # πελατών σε $M/M/1$ ($\lambda_1, \mu$) $\quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}$

$$E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}.$$

Θεωρώντας όλους τους πελάτες έχω ότι:

$Q_1 + Q_2$ = # πελατών σε $M/M/1$ ($\lambda_1+\lambda_2, \mu$)

Επειδή η πειθαρχία δεν λαμβάνει υπόψη τους χρόνους εξυπηρέτησης, έχω ίδιο $E[Q]$ όπως με FCFS.

Άρα αν $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}$ έχω

$$E[Q_1+Q_2] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2} \Rightarrow E[Q_2] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2} - \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$$