$E[I] = \frac{1}{\lambda}$ ✓ λόγω Poisson διαδ. αφίξεων

$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-\rho = \frac{1/\lambda}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$

↑ αναγεννητικότητα

Τέλος $E[Y] = E[Z] - E[I]$

$= \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1-1+\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$ ⇝ ίδιο με το $E[S]$

15/10/24

(1) ΑΜΤ στην $M/M/1$ με χρόνους επανεκκίνησης

- Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ.
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS
- Κενό σύστημα ⇒ Ακαριαία απενεργοποίηση υπηρέτη
- Μόλις φθάσει πελάτης σε κενό σύστημα ⇒ Διαδικασία επανεκκίνησης $\sim Exp(\theta)$

$E[Q] = ;$ $\quad E[S] = ;$

Λύση: ΑΜΤ $\quad$ N. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

Δέσμευση στην "κατάσταση" του συστήματος για τον υπολογισμό μέσου χρόνου παραμονής.

Εκτός της $Q(t)$ = # πελατών τη στιγμή t, χρειαζόμαστε

$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης ενεργός τη στιγμή } t \\ 0, & \text{ανενεργός} \end{cases}$

Έστω S ο χρόνος παραμονής ενός επιλ. πελάτη και I^- η κατάσταση που βρίσκει τον υπηρέτη, Q^- = # πελατών που βρίσκει.

$E[S] = \sum_i \sum_n Pr[Q^- = n, I^- = i] \cdot E[S \mid Q^- = n, I^- = i]$

Έχω $E[S \mid Q^- = n, I^- = i] = (n+1)\frac{1}{\mu}$

$E[S \mid Q^- = n, I^- = 0] = (n+1)\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta}$

Άρα, $E[S] = \frac{1}{\theta} \sum_n Pr[Q^- = n, I^- = 0] + \frac{1}{\mu} \sum_i \sum_n Pr[Q^- = n, I^- = i](n+1)$

Άρα $E[S] = \frac{1}{\theta} Pr[I^- = 0] + \frac{1}{\mu} \sum_i Pr[I^- = i] E[Q^- + 1 \mid I^- = i]$

$= \frac{1}{\theta} Pr[I^- = 0] + \frac{1}{\mu} E[Q^- + 1]$

$\underset{\text{PASTA}}{Q^- = Q}$ $\underset{\text{γενικευμένη PASTA}}{I^- = I}$

Q_S: 0-1 τ.μ

Με Ν. Little στον χρόνο εξυπηρέτησης

$E[Q_S] = \lambda E[B] = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho$

$\{Q_S = 1\}$ = $\{I = 1\}$

$\underbrace{E[Q_S]}_{\text{\# πελατών σε διαδ. εξυπηρ.}} = Pr[I^- = 1]$

Άρα $E[S] = \frac{1}{\theta}(1-\rho) + \frac{1}{\mu}(E[Q] + 1)$

$\xrightarrow{\rho} E[Q] = \frac{\lambda}{\theta}(1-\rho) + \rho E[Q] + \rho \Rightarrow E[Q] = \frac{\lambda}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho}$

Από Θ. Little: $E[S] = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

⇝ Στην κλασική M/M/1 έχω $E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$ και $E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

(2) Η $M|M|1$ με την k-πολιτική ενεργοποίησης

Ίδια $M|M|1$ όπως στο προηγούμενο (λ, μ)

Κενό σύστημα -> Ακαριαία απενεργοποίηση

Συσσώρευση k-πελατών -> Ακαριαία ενεργοποίηση

$E[Q]=;$ $E[S]=;$

Ορίζω $I(t)$ όπως πριν

Θ. Little : $E[Q] = \lambda E[S]$

Δέσμευση για το S: $E[S] = \sum_i \sum_n Pr[Q^- = n, I^- = i] \, E[S \mid Q^- = n, I^- = i]$

$$E[S \mid Q^- = n, I^- = 1] = (n+1)\frac{1}{\mu}, \quad n \geq 1$$

$$E[S \mid Q^- = n, I^- = 0] = (k-n-1)\frac{1}{\lambda} + (n+1)\frac{1}{\mu}, \quad 0 \leq n \leq k-1$$

Άρα $$E[S] = \frac{1}{\mu}\sum_i \sum_n \underbrace{Pr[Q^- = n, I^- = i]}_{Pr[I^-=i]Pr[Q^-=n \mid I^-=i]}(n+1) + \frac{1}{\lambda}\sum_n \underbrace{Pr[Q^-=n, I^-=0]}_{Pr[I^-=0]Pr[Q^-=n \mid I^-=0]}(k-n-1)$$

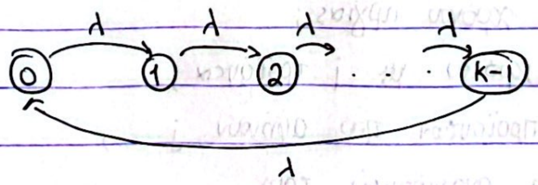
$$= \frac{1}{\mu}\left(\sum_i Pr[I^-=i] \, E[Q^-+1 \mid I^-=i]\right) = E[Q^-+1]$$

$$+ \frac{1}{\lambda} Pr[I^-=0] \, E[k-Q^- -1 \mid I^- = 0]$$

Άρα $$E[S] = \frac{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PASTA}}}{E[Q+1]}}{\mu} + \frac{Pr[I=0]\left(k-1-E[Q \mid I=0]\right)}{\lambda}$$

Όπως πριν (Θ. Little σε χρόνο εξυπηρέτησης) $Pr[I=0] = 1-\rho$

$E[Q \mid I=0]$ είναι ο μέσος αριθμός πελατών όταν ο υπηρέτης είναι ανενεργός.



$(Q \mid I=0) \sim$ Discrete Unif$(\{0,1,\dots,k-1\})$. Άρα $E[Q \mid I=0] = \frac{k-1}{2}$

Τελικό $E[S] = \frac{1}{\mu} E[Q] + \frac{1}{\mu} + \frac{(1-\rho)(k-1)}{2\lambda}$

$\overset{\cdot \rho}{\Rightarrow} E[Q] = \rho E[Q] + \rho + \frac{(1-\rho)(k-1)}{2}$

$\Rightarrow \underbrace{E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{k-1}{2}}$ $\Rightarrow \underbrace{E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} + \frac{k-1}{2\lambda}}$

(3) Ασκήσεις για ΑΜΤ

4.1, 4.3, 4.4

(4) Άσκηση 1.1

Ονοματολογία kendall : $M/E_3/4/10$ (SSTF)

Μέσος Ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων $= a = 1/\lambda$

Μέσος Χρόνος Εξυπηρέτησης $= b = 3/\mu$

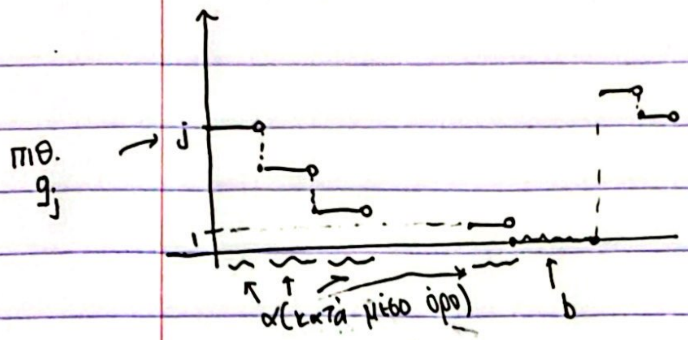
(5) Άσκηση 1.3

- Σύστημα εξυπηρέτησης με κύκλους λειτουργίας
- Άφιξη παρτίδας στην αρχή κάθε κύκλου
  $g_j = Pr[$ η παρτίδα έχει μεγ. $j]$ $j \geq 1$
- Επεξεργασία προϊόντων ένα-ένα.
  Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης $= a$
- Περίοδος αργίας b μετά από κάθε παρτίδα.

$p_0 =$ ποσοστό χρόνου αργίας ;

$p_j =$ ποσοστό χρόνου με j προϊόντα ;

$d_j =$ ποσοστό προϊόντων που αφήνουν j ;
κατά την αναχώρησή τους



$$p_0 = \frac{b}{\sum_{j=1}^{\infty} g_j\, j a + b} = \frac{b}{E[G]\,a + b}$$

g_j: Pr[η παρτίδα έχει μέγεθος j]

μέγεθος ομάδας

$$E\left[\sum_{i=1}^{G} X_i + Y\right] =$$

X_i: χρόνος επεξεργ. i-πελάτη

Y: περίοδος αργίας

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{Pr[G=j]}_{g_j}\, E\left[\sum_{i=1}^{j} X_i + Y\right]$$

ή $\sum_{k=j}^{\infty} g_k \cdot a$

$$p_j = \frac{Pr[G \geq j]\,a}{\sum_{j=1}^{\infty} g_j\, j a + b} = \frac{Pr[G \geq j]\,a}{E[G]\,a + b}, \quad j \geq 1.$$

$$d_j = \frac{\text{Ρυθμός αναχωρήσεων που αφήνουν } j}{\text{Ρυθμός αναχωρήσεων}} = \frac{\sum_{k=j+1}^{\infty} g_k}{\sum_{j=1}^{\infty} j\, g_j} = \frac{Pr[G \geq j+1]}{E[G]}.$$