... σε G/G/1.

$E[Q_s]=\rho \implies Pr[Q_s=1]=\rho \implies Pr[Q\neq 0]=\rho \implies p_0=Pr[Q=0]$
$=1-\rho$

(7) Ερμηνείες του ρ

$\rho=\lambda b$: Μέση εισερχόμενη εργασία ανά χρονική μονάδα
= Μέσο # πελατών σε διαδικασία εξυπηρέτησης
$\overset{G/G/C}{=}$ Μέσο # απασχολημένων υπηρετών.
$\overset{G/G/1}{=}$ Πιθανότητα μη-κενού συστήματος.

(8) Ασκήσεις
1.1-1.10 (1.7-1.10 πολύ εύκολες)
(1.6 δύσκολη)

10/10/24

(1) Βιβλίο
- Κεφ. 1 (Θεωρία)
- Κεφ. 4 : 4.1 (Ανάλυση Μέσης Τιμής) ΑΜΤ.

(2) Ιδέα ΑΜΤ
- Οικονομικός υπολογισμός των $E[Q]$, $E[S]$ σε συστήματα με Poisson διαδικασία αφίξεων.
- Χρειαζόμαστε 2 εξισώσεις :
1η: Νόμος Little : $E[Q]=\lambda E[S]$
2η: Δέσμευση στο # πελατών που βρίσκει ένας πελάτης κατά την άφιξή του για τον υπολογισμό του $E[S]$.

$$E[S]=E[E[S|Q^-]]=\sum_{n=0}^{\infty}Pr[Q^-=n]\,E[S|Q^-=n]$$

$$=E[g(Q^-)]\overset{g\text{ γραμμ.}}{=}g(E[Q^-])\overset{\text{Poisson αφίξεις}}{=}g(E[Q])$$

(3) ΑΜΤ για την $M/M/1/1$ ουρά

λ: ρυθμός αφίξεων

μ: ρυθμός εξυπηρέτησης

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$(p_n), (a_n), (d_n), E[Q], E[S] = ;$

N. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$ (1)

Υπολογισμός του $E[S]$: $E[S] = Pr[Q^- = 0] E[S | Q^- = 0] + Pr[Q^- = 1] E[S | Q^- = 1] =$

$= Pr[Q^- = 0] 1/\mu + Pr[\cancel{Q^- = 1}] \cdot 0$

$\overset{PASTA}{=} Pr[Q=0] 1/\mu$ (2)

Άρα (1) κ' (2) $\Rightarrow E[Q] = \lambda \frac{1}{\mu} Pr[Q=0] \Rightarrow 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_0 = \rho \cdot p_0$

Επίσης $p_0 + p_1 = 1$.

Οπότε $p_0(1+\rho) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\rho}, \; p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$(d_n) = (a_n) = (p_n)$

μεμονωμένες αφίξεις-αναχωρ. PASTA

$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho}, \; E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$

Υπολογισμός του $E[S]$ με δέσμευση στο Q^-

$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^- = n]}_{= a_n} E[S | Q^- = n] \overset{PASTA}{=} p_n$

$E[S | Q^- = n] = \frac{n+1}{\mu}$

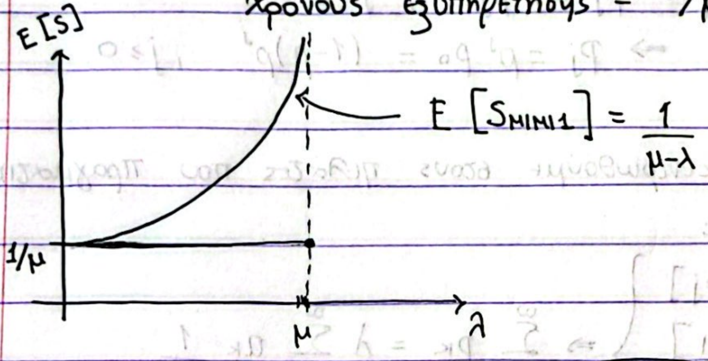
Άρα $E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{E[Q+1]}{\mu}$ (2)

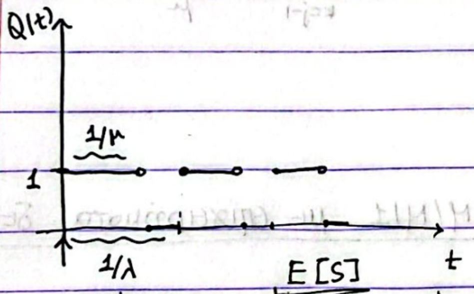
(1) & $(2) \Rightarrow E[Q] = \lambda \cdot \frac{E[Q]+1}{\mu} = \rho E[Q] + \rho \Rightarrow$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} \xrightarrow{\text{Θ. Little}} E[S] = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

(5) Σύγκριση M/M/1 & αντίστοιχης D/D/1

- M/M/1 με Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων και Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- D/D/1 με ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων $= 1/\lambda$ και χρόνους εξυπηρέτησης $= 1/\mu$.





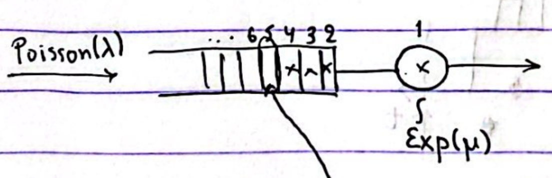
Η τυχαιότητα έχει πολύ σοβαρό αντίκτυπο για μεγάλα ρ.

E[S]

	$\rho = 0.9$	$\rho = 0.99$	$\rho = 0.999$
M/M/1	10	100	1000
D/D/1	1	1	1

$\frac{1}{\mu(1-\rho)}$

(6) Εύρεση (p_n) στη M/M/1 με βασικά αποτελέσματα



Θ. Little στο ~~χρόνο~~ εξυπηρέτησης (θέση 1) : $p_0 = 1-\rho$

Θ. Little στη θέση (j) : $E[Q_j] = \lambda_j E[S_j]$ (j)

$$E[Q_j] = 1 \cdot Pr[Q_j = 1] + \cancel{0 \cdot Pr[Q_j = 0]}$$
$$= Pr[Q \geq j]$$

$\lambda_j = \lambda$

$$E[S_j] = Pr[Q^- \geq j-1]\,\frac{1}{\mu} + \cancel{Pr[Q^- < j-1] \cdot 0}$$

$$(j) \Rightarrow \sum_{k=j}^{\infty} p_k = \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \frac{1}{\mu} \overset{PASTA}{=} \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k.$$

$$(j+1) \Rightarrow \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j}^{\infty} p_k.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη: $p_j = \rho\, p_{j-1}, \quad j \geq 1.$

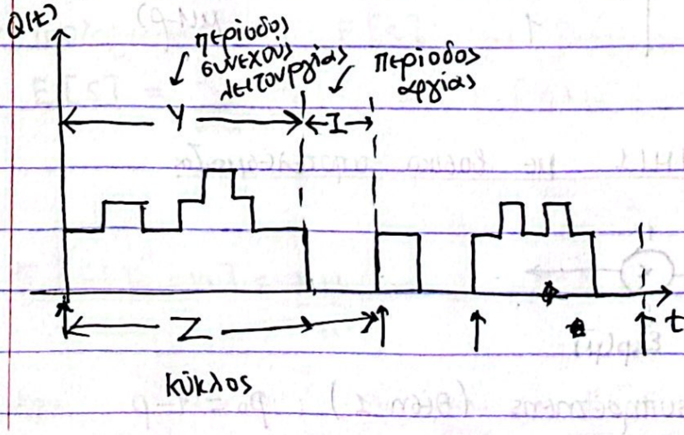
$$\Rightarrow p_j = \rho^j p_0 = (1-\rho)\rho^j, \quad j \geq 0$$

→ Εναλλακτικά αν επικεντρωθούμε στους πελάτες που πραγματικά περνάνε από την j θέση:

$$\left.\begin{array}{l} E[Q_j] = Pr[Q \geq j] \\ \lambda_j = \lambda\, Pr[Q^- \geq j-1] \\ E[S_j] = \frac{1}{\mu} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=j}^{\infty} p_k = \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \frac{1}{\mu}.$$

(7) Επιπλέον αποτελέσματα στην M/M/1 με επιχειρήματα δέσμευσης και αναγεννητικότητας

- Μελέτη κύκλου απασχόλησης (μέσες τιμές)



$E[I], E[Z], E[Y] = ;$

$E[I] = \frac{1}{\lambda}$ λόγω Poisson διαδ. αφίξεων

$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$ $\Rightarrow$ $1-\rho = \frac{1/\lambda}{E[Z]}$ $\Rightarrow$ $E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$

αναγεννητικότητα

Τέλος $E[Y] = E[Z] - E[I]$

$= \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1-1+\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$ ⇝ ίδιο με το E[S]