(7) Ερώτημα

Συνθήκες ώστε να συμπίπτουν κάποιες από τις (a_j), (p_j), (d_j).

(8) 4 βασικά αποτελέσματα

- Χαρακτηρισμός ευστάθειας
- Ιδιότητα των μεμονωμένων αφίξεων - αναχωρήσεων
- Ιδιότητα PASTA
- Νόμος Little

08/10/24

(1) Ορισμός

λ: ορισμός αφίξεων

b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho := \lambda b$: ρυθμός ή ένταση συνωστισμού
(utilization rate, congestion rate)

(2) Χαρακτηρισμός ευστάθειας σε G/G/C σύστημα

Θεώρημα: Έστω G/G/C σύστημα με είτε την κατανομή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων είτε την κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης να έχουν συνεχές μέρος. Τότε:

(1) $\rho < c \Rightarrow \exists\ (p_j), (a_j), (d_j) \qquad p_j, a_j, d_j > 0 \quad \forall j$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} d_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1 \quad \text{(ευστάθεια)}$$

(2) $\rho \geq c \Rightarrow p_j = d_j = a_j = 0 \quad \forall j$ (αστάθεια)

Στο D/D/C σύστημα : $\rho \leq c \Rightarrow$ ευστάθεια
$\rho > c \Rightarrow$ αστάθεια

Θεώρημα: Αν σε ένα σύστημα έχουμε μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις τότε $(a_j) = (d_j)$.

Αιτιολόγηση

$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0, t]$

$D(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0, t]$

$A_j(t) = \#$ αφίξεων στο $(0, t]$ που βρίσκουν j πελάτες

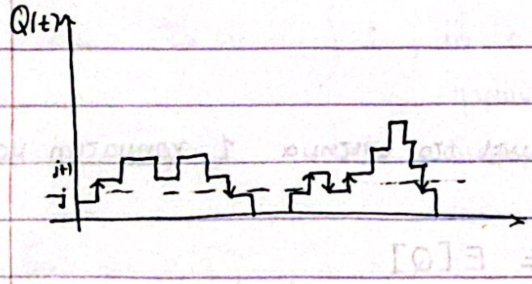
$D_j(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0, t]$ που αφήνουν j πελάτες.

Τότε, $$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\left(\frac{A(t)}{t}\right)}$$ → ρυθμός αφίξεων

$$d_j = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_j(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}}$$

Όμως $$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αναχωρήσεων}}$$

για ευσταθές σύστημα



Μεμονωμένες αφίξεις/αναχωρήσεις
$$|A_j(t) - D_j(t)| \le 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t) - D_j(t)}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{t}$$

Άρα $a_j = d_j$

(4) Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Αν οι αφίξεις γίνονται με Poisson τότε πιθανότητα πελάτη να βρει j είναι το ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα υπάρχουν j πελάτ

<u>Θεώρημα:</u> Poisson διαδικασία αφίξεων $\Rightarrow (a_j) = (p_j)$

<u>Αιτιολόγηση</u>

πελατών τη στιγμή t # αφίξεων στο $(t, t+h)$

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} Pr[Q(t)=j \mid A(t,t+h)=1]$$

<u>Bayes:</u>
$$\lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[Q(t)=j]\,\overbrace{Pr[A(t,t+h)=1 \mid Q(t)=j]/h}^{\to \lambda,\ h\to 0^+}}{\underbrace{Pr[A(t,t+h)=1]/h}_{\to \lambda,\ h\to 0^+}} = p_j$$

Στη διαδικασία Poisson: $Pr[A(t,t+h)=1] = \lambda\cdot h + o(h)$

$Pr[A(t,t+h)=1 \mid Q(t)=j] = \lambda\cdot h + o(h)$

(5) <u>Νόμος του Little</u> (1962)

<u>Θεώρημα:</u> Σε ευσταθές σύστημα $\underbrace{E[Q]}_{\text{μέσο \# πελατών}} = \underbrace{\lambda}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} \cdot \underbrace{E[S]}_{\text{μέσος χρόνος παραμονής}}$

$L = \lambda \cdot W$

↑ length ↑ waiting

<u>Αιτιολόγηση</u>

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει στο σύστημα 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής.

- Μέσα έσοδα ανά χρονική μονάδα με συνεχή πληρωμή $= E[Q]$
- Μέσα έσοδα ανά χρονική μονάδα με πληρωμή κατά την αναχώρηση ή άφιξη $= \lambda \cdot E[S]$
  - λ ↓ ρυθμός αναχωρήσεων πελατών
  - $E[S]$ ↳ πληρωμή ανά πελάτη

Άρα $E[Q] = \lambda E[S]$

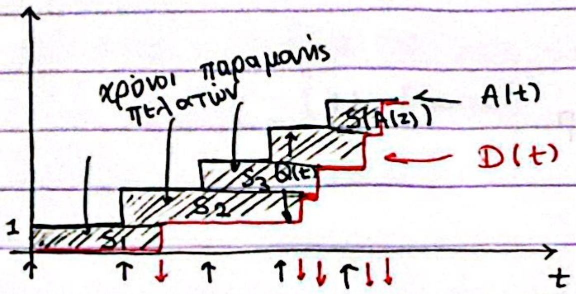
Πιθανοθεωρητική Απόδειξη

$$E[Q] = \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)\,du\right]}{E[\underbrace{Z}_{\text{κύκλος απασχόλησης}}]}$$

$$\lambda = \frac{E[\underbrace{A(Z)}_{\#\text{ αφίξεων στο } (0,Z]}]}{E[Z]}$$

$$E[S] = \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]}$$

→ Αρκεί και πρέπει νδο $\dfrac{E\left[\int_0^Z Q(u)\,du\right]}{E[Z]} = \dfrac{E[A(Z)]}{E[Z]} \cdot \dfrac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]}$



Έστω $I_k(u) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } k\text{-οστός πελάτης είναι παρών τη στιγμή } u \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Για $u \in (0, Z]$, για $k = 1, 2, \dots, A(Z)$

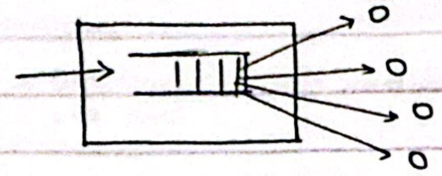
$$Q(u) = \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u), \quad S_k = \int_0^Z I_k(u)\,du$$

Έχουμε: $E\left[\int_0^Z Q(u)\,du\right] = E\left[\int_0^Z \sum_{k=1}^{A(Z)} I_k(u)\,du\right]$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} \int_0^Z I_k(u)\,du\right] = E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right].$$

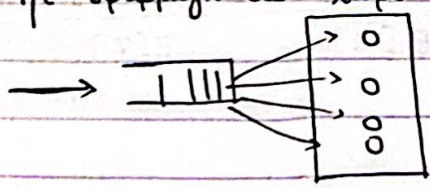
(6) Άμεσες συνέπειες Ν. Little

- Με εφαρμογή στο χώρο αναμονής



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{\# πελατών} \\ \text{σε αναμονή}}}{E[Q_q]} = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{χρόνος} \\ \text{αναμονής}}}{E[W]}$$

- Με εφαρμογή στο χώρο εξυπηρέτησης



$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{\# πελατών} \\ \text{σε εξυπηρ.}}}{E[Q_s]} = \lambda \cdot \underbrace{E[B]}_{\substack{b \\ \downarrow \\ \text{χρόνος} \\ \text{εξυπηρέτησης}}} = \lambda b = \rho$$

Σε συστήματα με 1-1 αλληλεπίδραση υπηρ-πελ $\rightarrow$ $E\left[\begin{matrix}\text{\# απασχολ.} \\ \text{υπηρετών}\end{matrix}\right] = E[Q_s]$

πχ. G/G/C

Έστω $I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ υπηρέτης είναι απασχολημένος τη στιγμή } t \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

Σε G/G/C σύστημα:

$$\rho = E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{c} I_i}_{\substack{\text{\# απασχολ.} \\ \text{υπηρετών}}}\Big] = c \cdot E[I_i] = c \cdot Pr[I_i = 1]$$

Άρα στο G/G/C $\begin{matrix}\text{ποσοστό χρόνου} \\ \text{απασχόλησης υπηρέτη}\end{matrix} = \dfrac{\rho}{c}$

*** Σε G/G/1:

$E[Q_s] = \rho \Rightarrow Pr[Q_s = 1] = \rho \Rightarrow Pr[Q \neq 0] = \rho \Rightarrow p_0 = Pr[Q=0] = 1-\rho$

(7) Ερμηνείες του ρ

$\rho = \lambda b$: Μέση εισερχόμενη εργασία ανά χρονική μονάδα

= Μέσο # πελατών σε διαδικασία εξυπηρέτησης

$\overset{G/G/c}{=}$ Μέσο # απασχολημένων υπηρετών.

$\overset{G/G/1}{=}$ Πιθανότητα μη-κενού συστήματος.

(8) Ασκήσεις

1.1 - 1.10 (1.7-1.10 πολύ εύκολες)
(1.6 δύσκολη)