Όλα αυτά τα μεγέθη (όρια) είναι ίδια όταν η $\{Q(t)\}$ είναι αναγεννητική.

03/10/24

(1) Αναγεννητικότητα

Ορισμός: $\{X(t) : t \geq 0\}$ στοχαστική διαδικασία λέγεται αναγεννητική αν $\exists S_1 \geq 0$ με $Pr[S_1 < \infty] = 1$ και $Pr[S_1 > 0] > 0$ ώστε:

(i) $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$, $\{X(t) : t \geq S_1\}$ ανεξ. δεδομ. $X(S_1)$

(ii) $\{X(t) : t \geq 0\}$, $\underbrace{\{X(t) : t \geq S_1\}}_{=}$ στοχαστικά ισοδύναμες.

$$\{X(t+S_1) : t \geq 0\}$$

πχ.

- Μια ανανεωτική διαδικασία είναι αναγεννητική.
- Σε ένα σύστημα $G/G/c$, η $\{Q(t)\}$ με $Q(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t. είναι αναγεννητική.
(υποθέτοντας ότι τη στιγμή $t=0$ φθάνει πελάτης που βρίσκει κενό το σύστημα και θέτοντας S_1 την επόμενη στιγμή που θα συμβεί αυτό)
- Σε μια Μαρκ $\{X(t)\}$ οι στιγμές επίσκεψης σε μια κατάσταση είναι στιγμές αναγέννησης.

Παρατήρηση

Σε μια αναγεννητική διαδικασία υπάρχει ακολουθία χρόνων $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$ ώστε:

(i) $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες

(ii) $\{X(t) : t \geq 0\}$, $\{X(t+S_n) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες

(2) Εργοδικό Θεώρημα Αναγεννητικών Διαδικασιών

$\{X(t)\}$ αναγεννητική $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{X(u)\le x\}\,du}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)\le x\}\,du\right]}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^{S_1} 1\{X(u)\le x\}\,du\right]}{E(S_1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Pr[X(u)\le x]\,du}{t} = \lim_{t\to\infty} Pr[X(\underbrace{U_t}_{\text{Uniform}([0,t])})\le x]$$

$\rightsquigarrow$ Αν επιπλέον η κατανομή της S_1 είναι απεριοδική (π.χ. S_1 συνεχής ή μικτή) τότε τα όρια ισούνται επιπλέον με $\lim_{t\to\infty} Pr[X(t)\le x]$

(3) Ισοδύναμες εκφράσεις για οριακές πιθανότητες, μέσες τιμές σε συστήματα εξυπηρέτησης.

Πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα (σε τυχαία χρονική στιγμή σε συνεχή χρόνο) $= \underbrace{Pr[Q=n]}_{= P_n}$

$$Pr[Q=n] = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^t 1\{Q(u)=n\}\,du}{t} \\[2ex] \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{Q(u)=n\}\,du\right]}{t} \\ \vdots \end{cases}$$

Ομοίως μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $= E[Q]$

$$E[Q] = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^t Q(u)\,du}{t} \\[2ex] \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t Q(u)\,du\right]}{t} \\[2ex] \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^Z Q(u)\,du\right]}{\dots} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^t E[Q(u)]\,du}{t} \\[2ex] \lim_{t\to\infty} E[Q(t)] \end{cases}$$

$\rightarrow$ κύκλος απασχόλησης

Σημείωση:

X απεριοδική τ.μ $\Leftrightarrow \nexists\, d$ τ.ω $\sum_{n=0}^{\infty} Pr[X=nd]=1$.

→ Πιθανότητα ο χρόνος παραμονής πελάτη να είναι $\leq x$ $= Pr[S\leq x] = F_S(x)$

$$Pr[S\leq x] = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1\{S_k\leq x\}}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{E\left[\sum_{k=1}^{n} 1\{S_k\leq x\}\right]}{n} \\ \dfrac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1\{S_k\leq x\}\right]}{E(A(Z))} \\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Pr[S_k\leq x]}{n} = \lim_{n\to\infty} Pr[S_{U_n}\leq x] \\ \lim_{n\to\infty} Pr[S_n\leq x] \end{cases}$$

$A(Z)$ → # αφίξεων σε 1 κύκλο απασχόλησης

$U_n \sim$ Uniform$\{1,2,\dots,n\}$

(4) Εμφυτευμένες Διαδικασίες

Έστω σύστημα εξυπηρέτησης με $Q(t)=$ # πελατών τη στιγμή t.

$A_1\leq A_2\leq \dots$ στιγμές αφίξεων

$D_1\leq D_2\leq \dots$ στιγμές αναχώρησης

$Q_n^- = Q(A_n^-) =$ # πελατών πριν την n-οστή άφιξη.

$Q_n^+ = Q(D_n) =$ # πελατών μετά την n-οστή αναχώρηση.

$a_j =$ πιθανότητα ένας πελάτης να βρει j κατά την άφιξή του $=$

$= \lim_{n\to\infty} Pr[Q_n^- = j]$

$d_j =$ πιθανότητα ένας πελάτης να αφήσει j κατά την αναχώρησή του $=$

$= \lim_{n\to\infty} Pr[Q_n^+ = j]$.

(5) Παράδειγμα 1

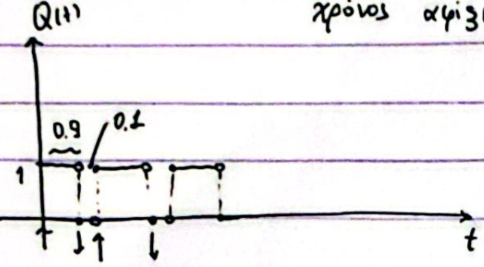
P_j : ποσοστό του χρόνου με j πελάτες

a_j : ποσοστό αφίξεων που βρίσκαν j

d_j : ποσοστό αναχωρήσεων που αφήνουν j

1) D/D/1 με $a=1$ $b=0.9$

↳ μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων ↳ μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.



$$P_j = \begin{cases} 0.1, & j=0 \\ 0.9, & j=1 \\ 0, & j\geq 2 \end{cases}$$

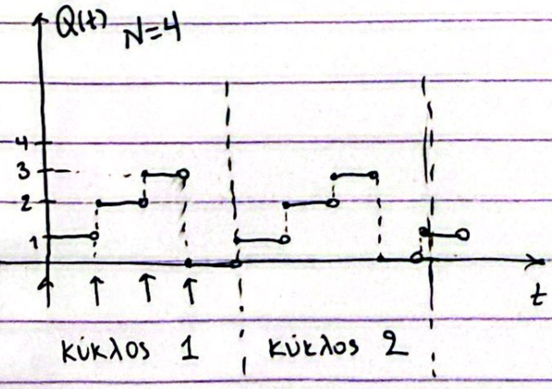
$$d_j = a_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j\geq 1 \end{cases}$$

2) D/D/1 με $a=1$ $b=0.1$

$$P_j = \begin{cases} 0.9, & j=0 \\ 0.1, & j=1 \\ 0, & j\geq 2 \end{cases} \qquad d_j = a_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j\geq 1 \end{cases}$$

(6) Παράδειγμα 2

Λεωφορειάκια αναχωρούν όταν συμπληρωθούν οι N θέσεις τους.
Οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ
($Exp(\lambda)$ χρόνοι μεταξύ των αφίξεων)



$$P_j = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{N}{\lambda}} = \dfrac{1}{N}, & 0\leq j\leq N-1 \\ 0, & j\geq N \end{cases}$$

$$a_j = \begin{cases} 1/N, & 0\leq j\leq N-1 \\ 0, & j\geq N \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j\geq 1 \end{cases}$$

Εδώ $d_j \neq P_j, a_j$

(7) Ερώτημα

Συνθήκες ώστε να συμπίπτουν κάποιες από τις (a_j), (p_j), (d_j).

(8) 4 βασικά αποτελέσματα

- Χαρακτηρισμός ευστάθειας
- Ιδιότητα των μεμονωμένων αφίξεων - αναχωρήσεων
- Ιδιότητα PASTA
- Νόμος Little