01/10/24

## Περιοχές της Θεωρίας Ουρών

- Έναρξη Θ. Ουρών
  Erlang (1909)
- Διακλαδικό αντικείμενο: Μαθηματικά, Πληροφορική, Μηχανικοί Παρ-Διοίκ.

→ Μοντελοποίηση
→ Αποτίμηση απόδοσης ⇒ Στοχαστικές Διαδικασίες
→ Βέλτιστος σχεδιασμός ⇒ Μη-γραμμικός προγραμματισμός - Ακέραιος προγ.
→ Δυναμικός έλεγχος ⇒ Δυναμικός προγραμματισμός
→ Παιγνιοθεωρητική ανάλυση ⇒ Θεωρία Παιγνίων

## Βασικά στοιχεία ενός συστήματος εξυπηρέτησης

- Ονοματολογία Kendall

A / B / c / k ( )

A: Διαδικασία αφίξεων
B: Κατανομή χρόνων εξυπηρ.
c: # παράλληλων υπηρετών
k: χωρητικότητα συστήματος (k)
( ): πειθαρχία ουράς

### (1) Διαδικασία Αφίξεων

Διαδικασία αφίξεων (σημειακή διαδικασία)
Συνήθως είναι ανανεωτική διαδικασία
(ανεξάρτητοι και ισόνομοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων)

D (deterministic): Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων
M (memoryless, Markovian): Εκθετικοί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων
$E_k$ (Erlang-k): Erlang $(k, \lambda)$ ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων
$H_k$ (Hyperexponential-k): Hyper $(p_1, p_2, \ldots, p_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ -''-
G (General): Ανεξάρτητοι και ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

(2) Κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης

(3) $c$ = # (πλήθος) υπηρετών

(4) $k$ = # θέσεων εξυπηρέτησης + # θέσεων αναμονής

(5) Πειθαρχία ουράς

FCFS : First - Come - First - Served.

LCFS : Last - Come - First - Served

SIRO : Service - In - Random - Order

SSTF : Shortest - Service - Time - First

πχ.

M / D / 1 / 10 (SSTF)

! Αν $k = \infty$ παραλείπεται

Αν πειθαρχία = FCFS παραλείπεται.

G / G / c

## Βασικές παράμετροι εισόδου

$a$: Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων

$\lambda = 1/a$ : ρυθμός αφίξεων

$b$: Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\mu = 1/b$ : ρυθμός εξυπηρέτησης

## Βασικές στοχαστικές διαδικασίες για μέτρα απόδοσης

$Q(t)$ = # πελατών στο σύστημα τη στιγμή $t$.

$Q_q(t)$ = # πελατών σε αναμονή τη στιγμή $t$.

$Q_s(t)$ = # πελατών σε εξυπηρέτηση τη στιγμή $t$.

οπτική διαχειριστή

$S_n$ = Χρόνος παραμονής του n-οστού πελάτη

$W_n$ = Χρόνος αναμονής του n-οστού πελάτη

$B_n$ = Χρόνος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη

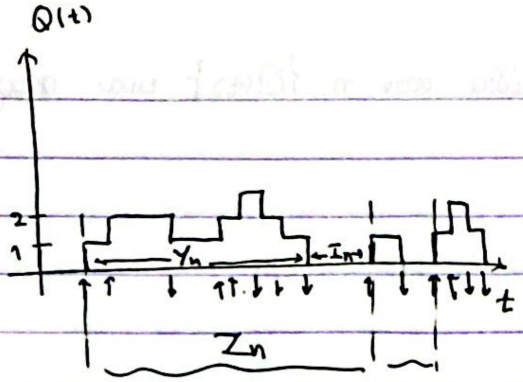
οπτική πελατών

$Z_n$ = Διάρκεια κύκλου λειτουργίας

$Y_n$ = Διάρκεια περιόδου συνεχούς λειτουργίας

$T_n$ = Διάρκεια περιόδου αργίας

οπτική υπηρετών




Κύκλος δημιουργίας

(από τον πελάτη που βρίσκει κενό σύστημα ως τον επόμενο)

$$Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t)$$
$$S_n = W_n + B_n$$
$$Z_n = Y_n + I_n$$

## Μέτρα απόδοσης συστήματος - Εισαγωγή

→ Πόσοι πελάτες είναι στο σύστημα; → $Pr[Q(t)=n]$ ή $E[Q(t)]=;$

→ Πόσο θα περιμένει κάθε πελάτης; → $Pr[S_n \le x]$ ή $E[S_n]=;$

Επικεντρωνόμαστε σε οριακές κατανομές.

Πιθανότητα στο σύστημα να υπάρχουν n πελάτες $\equiv Pr[Q=n]$

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=n\}}\,du}{t}$ : μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται n πελάτες.

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=n\}}\,du\right]}{t}$ : μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται n πελάτες.

$= \dfrac{E\left[\int_0^Z 1_{\{Q(u)=n\}}\,du\right]}{E(Z)}$ : ποσοστό χρόνου που στο σύστημα βρίσκονται n πελάτες σε 1 κύκλο λειτουργίας.

$= \lim_{t\to\infty} \dfrac{\int_0^t Pr[Q(u)=n]\,du}{t} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t Pr[Q(u)=n]\left(\dfrac{1}{t}\right)du$ ← σ.π.π μιας $U_t \sim Uniform([0,t])$

$= \lim_{t\to\infty} Pr[Q(U_t)=n]$ $\;\; = \lim_{t\to\infty} Pr[Q(t)=n]$

$U_t \sim Uniform([0,t])$

Όλα αυτά τα μεγέθη (όρια) είναι ίδια όταν η $\{Q(t)\}$ είναι αναγεννητική.