

# Ουρές Αναμονής

Αντώνιος Θ. Οικονόμου

24 Σεπτεμβρίου 2024

## 1 Βασικά στοιχεία μαθήματος

- Τίτλος μαθήματος: Ουρές Αναμονής.
- Κωδικός μαθήματος: MAΘ859.
- Ιστότοπος μαθήματος: <https://eclass.uoa.gr/courses/MATH187/>.
- Επίπεδο: Προπτυχιακό μάθημα επιλογής 7ου εξαμήνου για το Πτυχίο Μαθηματικών του Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ).
- Προαπαιτούμενες γνώσεις: Είναι απαραίτητο οι φοιτητές να γνωρίζουν καλά τις έννοιες και τις υπολογιστικές τεχνικές από ένα πρώτο πανεπιστημιακό μάθημα πιθανοτήτων, όπως το μάθημα «Πιθανότητες I» που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Η γνώση των μαθημάτων «Στοχαστικές Ανελίζεις» και «Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα» του Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ δεν είναι απαραίτητη, καθώς το αναγκαίο υλικό από αυτά τα μαθήματα θα παρουσιαστεί στην τάξη. Όμως, πιθανή γνώση αυτών των μαθημάτων θα διευκολύνει πολύ την κατανόηση του μαθήματος «Ουρές Αναμονής».
- Διδακτικές ώρες: 4 ώρες την εβδομάδα για 13 εβδομάδες.
- Γλώσσα διδασκαλίας: Ελληνική.
- Ημέρες και ώρες διδασκαλίας: Κάθε Τρίτη και Πέμπτη, 9:15-11:00 με ένα δεκαπεντάλεπτο διάλειμμα (10:00-10:15).
- Αίθουσα διδασκαλίας: Γ22.
- Αυτόματη καταγραφή και ζωντανή μετάδοση: Οι διαλέξεις του μαθήματος θα καταγράφονται αυτόματα και θα αναμεταδίδονται ζωντανά μέσω του συστήματος delos. Πρέπει να σημειωθεί ότι η υποστήριξη της υπηρεσίας βασίζεται στο μοντέλο της 'Καλύτερης Προσπάθειας' (Best effort) και όχι της 'Εγγυημένης Ποιότητας'. Δεν εγγυάται την 100% καταγραφή λόγω της σύνθετης και αυτόματης τεχνικής λύσης. Οι ζωντανές μεταδόσεις θα είναι διαθέσιμες στο σύνδεσμο:

<https://delos.uoa.gr/opendelos/search-live>.

Οι δημόσιες καταγραφές θα είναι διαθέσιμες στο ευρύ κοινό στο σύνδεσμο:

<https://delos.uoa.gr/opendelos/>.

## 2 Διδάσκων

- Αντώνιος Οικονόμου, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Εθνικού & Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. <http://scholar.uoa.gr/aeconom/home>.

## 3 Συνοπτική περιγραφή του μαθήματος

- Η Θεωρία Ουρών Αναμονής (Queueing Theory) είναι ένα διεπιστημονικό πεδίο που βρίσκεται στην τομή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών (κυρίως της Εφαρμοσμένης Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Επιχειρησιακής Έρευνας), των Επιστημών Μηχανικού (κυρίως του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού, του Μηχανολόγου Μηχανικού και του Μηχανικού Διοίκησης και Παραγωγής), της Πληροφορικής, καθώς και της Διοικητικής Επιστήμης (κυρίως της Διοίκησης Λειτουργιών). Αντικείμενο μελέτης της είναι η μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησης (service systems), γνωστών και ως ουρών αναμονής (queueing systems). Τα συστήματα εξυπηρέτησης είναι μαθηματικά πρότυπα που παριστάνουν συστήματα εισόδου-εξόδου πελατών που δέχονται κάποια μορφή εξυπηρέτησης από υπηρέτες, στα οποία υπεισέρχεται τυχαιότητα. Οι έννοιες «πελάτης», «εξυπηρέτηση» και «υπηρέτης» ερμηνεύονται με μεγάλη ευρύτητα και έτσι οι εφαρμογές της Θεωρίας Ουρών Αναμονής εκτείνονται σε πάρα πολλά πεδία της επιστήμης και της ανθρώπινης δραστηριότητας γενικότερα. Πράγματι, τέτοια συστήματα εμφανίζονται σε πολλές καταστάσεις που παρατηρούνται στην καθημερινή ζωή, καθώς και σε περίπλοκα τεχνολογικά συστήματα.

Ιστορικά, η συγκεκριμένη επιστημονική περιοχή άρχισε να αναπτύσσεται στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, όταν ο Agner Krarup Erlang (1878-1929) δημοσίευσε κάποιες εργασίες του για τη μαθηματική μοντελοποίηση του συνωστισμού σε τηλεφωνικά δίκτυα. Η μεγάλη επιτυχία αυτών των μεθόδων στη μελέτη πραγματικών συστημάτων έδωσε τεράστια ώθηση στην περαιτέρω ανάπτυξη της Θεωρίας Ουρών Αναμονής, καθώς και των εφαρμογών της και σε άλλα πεδία.

Στη Θεωρία Ουρών Αναμονής, η μελέτη ενός συστήματος μπορεί να περιλαμβάνει όλα ή κάποια από τα εξής στάδια:

- μαθηματική προτυποποίηση (μοντελοποίηση),
- αποτίμηση απόδοσης,
- βέλτιστο σχεδιασμό,
- βέλτιστο δυναμικό έλεγχο,
- προσδιορισμό στρατηγικής συμπεριφοράς,
- σύγκριση με άλλα συστήματα εξυπηρέτησης.

Η μαθηματική προτυποποίηση αποτελεί το πρώτο και απαραίτητο στάδιο για την οποιαδήποτε μελέτη στη Θεωρία Ουρών Αναμονής. Κατά τη διάρκεια του σταδίου αυτού, ο ερευνητής επικεντρώνεται στον εντοπισμό των κύριων χαρακτηριστικών του συστήματος που θα πρέπει να αναπαρασταθούν με το πρότυπο που θα υιοθετήσει. Στο σημείο αυτό, η δυσκολία έγκειται στην εύρεση μιας καλής ισορροπίας μεταξύ πιστότητας και επιλυσιμότητας του προτύπου. Συνήθως, όσο πιο πιστά αναπαριστά ένα πρότυπο το αρχικό σύστημα, τόσο δυσκολότερο είναι να μελετηθεί με μαθηματικές μεθόδους. Επομένως, θα πρέπει να επιλεγθεί το απλούστερο δυνατό πρότυπο, που όμως απεικονίζει τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του αρχικού συστήματος. Κατά τη διαδικασία της προτυποποίησης, επιλέγεται κάποια οικογένεια στοχαστικών διαδικασιών στο πλαίσιο της οποίας παριστάνεται το σύστημα.

Κατόπιν, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην αποτίμηση της απόδοσης του συστήματος, δηλαδή σε ερωτήματα του τύπου «Πόσοι πελάτες βρίσκονται στο σύστημα κατά μέσο όρο;» ή «Πόσο

χρόνο παραμένει στο σύστημα ένας πελάτης κατά μέσο όρο;» ή «Ποιο είναι το ποσοστό του χρόνου που ένας υπηρέτης είναι απασχολημένος;». Το βασικό εργαλείο σε αυτό το στάδιο είναι η Θεωρία Πιθανοτήτων και, ειδικότερα, το δυναμικό της μέρας, που αντιστοιχεί στις στοχαστικές διαδικασίες.

Αν ενδιαφέρει ο σχεδιασμός ενός νέου συστήματος, τότε έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού. Στην περίπτωση αυτή, κάποιες παράμετροι λειτουργίας ενός συστήματος θεωρούνται ως δοσμένες, π.χ. ο ρυθμός αφίξεων των πελατών ή ο ρυθμός εξυπηρέτησης ανά υπηρέτη που μπορεί να έχουν προκύψει από στατιστικά στοιχεία που τηρούνται για παρόμοια συστήματα. Κάποιες άλλες, όμως, παράμετροι λειτουργίας μπορούν να ελεγχθούν από τον σχεδιαστή του συστήματος, όπως π.χ. ο μέγιστος αριθμός των υπηρέτων, δηλαδή ο αριθμός των θέσεων εξυπηρέτησης που θα προβλεφθούν. Στην περίπτωση αυτή, υπολογίζουμε το μέτρο απόδοσης του συστήματος που μας ενδιαφέρει να βελτιστοποιήσουμε ως συνάρτηση των παραμέτρων που ελέγχουμε και, κατόπιν, βελτιστοποιούμε τη συνάρτηση με κλασικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως π.χ. βελτιστοποίηση για μια μεταβλητή με μηδενισμό της παραγώγου και σύγκριση των τιμών της συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία ή πιο προχωρημένες μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού με συνθήκες Lagrange, Karush-Kuhn-Tucker, ακέραιο προγραμματισμό κ.λπ.

Κάποιες μεταβλητές ελέγχου μπορούν να μεταβάλλονται όσο το σύστημα βρίσκεται σε λειτουργία, π.χ. ο αριθμός των ενεργών υπηρέτων μπορεί να προσαρμόζεται ανάλογα με τον συνωστισμό που παρατηρείται στο σύστημα. Στην περίπτωση που εστιάζουμε στον έλεγχο τέτοιων μεταβλητών, αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα βέλτιστου δυναμικού ελέγχου και το κατάλληλο εργαλείο μελέτης είναι ο στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός. Η διαφορά των προβλημάτων αυτών σε σχέση με τα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού έγκειται στο ότι οι μεταβλητές μπορούν να αλλάζουν τιμές ανάλογα με την κατάσταση του συστήματος, ενώ στα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού η τιμή τους πρέπει να προσδιοριστεί μία φορά και για πάντα.

Σε όλα τα προαναφερθέντα στάδια μελέτης ενός συστήματος εξυπηρέτησης, οι πελάτες θεωρούνται παθητικές οντότητες που δεν λαμβάνουν αποφάσεις. Βέβαια, από την εμπειρία μας από τα πραγματικά συστήματα εξυπηρέτησης, γνωρίζουμε ότι οι πελάτες είναι ενεργητικές οντότητες που λαμβάνουν αποφάσεις. Π.χ. σε ένα εστιατόριο ένας πελάτης επηρεάζεται (είτε θετικά είτε αρνητικά) από τον συνωστισμό που συναντά φθάνοντας σε αυτό. Μεγάλος συνωστισμός μπορεί να είναι μια ένδειξη καλής ποιότητας ή ένδειξη αργής εξυπηρέτησης. Σε κάθε περίπτωση, πάντως, ο συνωστισμός επηρεάζει τις αποφάσεις των δυνητικών πελατών ενός συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα λήψης αποφάσεων με πολλούς αποφασίζοντες: τους πελάτες, τους υπηρέτες και τον διαχειριστή. Ο καθένας από αυτούς λαμβάνει την απόφασή του, έχοντας υπόψη ότι και οι άλλες οντότητες λαμβάνουν αποφάσεις, η καθεμιά με σκοπό τη μεγιστοποίηση του δικού της οφέλους. Οπότε, δημιουργείται ένα «παίγνιο» μεταξύ των διαφόρων οντοτήτων, με την έννοια της σύγκρουσης των συμφερόντων τους, και το κατάλληλο πλαίσιο μελέτης είναι η Θεωρία Παιγνίων. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται και ως *προβλήματα στρατηγικής συμπεριφοράς* στα πλαίσια της Θεωρίας Ουρών.

Τέλος, συχνά εμφανίζεται η ανάγκη να συγκριθούν δύο συστήματα εξυπηρέτησης. Αυτό προκύπτει, π.χ. όταν ένας οργανισμός σκέφτεται την αντικατάσταση ενός παλαιού συστήματος εξυπηρέτησης από ένα νέο και, επομένως, επιθυμεί να συγκρίνει τα δύο συστήματα και να ποσοτικοποιήσει τη διαφορά τους, ώστε να καταλήξει στο αν είναι συμφέρουσα η αντικατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται ένα ή περισσότερα από τα στάδια μελέτης που αναπτύξαμε, ανάλογα με την προτεινόμενη αλλαγή.

Από τα παραπάνω, γίνεται φανερό ότι η Θεωρία Ουρών είναι ένα πολυεπίπεδο γνωστικό πεδίο που χρησιμοποιεί εργαλεία από πολλές περιοχές των Μαθηματικών και εφαρμόζει τα

αποτελέσματα σε πολλές περιοχές της καθημερινότητας και της τεχνολογίας, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των συστημάτων εξυπηρέτησης που εμφανίζονται. Επομένως, μια εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών πρέπει αναγκαστικά να είναι επιλεκτική σχετικά με τα στάδια μελέτης που θα πραγματοποιηθεί από τα προαναφερθέντα, τα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσει και τα πεδία εφαρμογών που θα παρουσιάσει.

Το μάθημα «Ουρές Αναμονής» επικεντρώνεται κυρίως στη μοντελοποίηση και στην αποτίμηση απόδοσης συστημάτων εξυπηρέτησης με βάση Μαρκοβιανές αλυσίδες. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι το μαθηματικά απλούστερο (και ταυτόχρονα εξαιρετικά ευρύ από πλευράς εφαρμογών) είδος στοχαστικών διαδικασιών που μπορεί να κατανοηθεί από κάποιον που έρχεται σε επαφή για πρώτη φορά με το αντικείμενο της Θεωρίας Ουρών Αναμονής.

## 4 Ύλη

- Περιγραφή, ονοματολογία και βασικά αποτελέσματα: βασική περιγραφή και ονοματολογία Kendall, αναγεννητικότητα και μέτρα απόδοσης συστήματος, εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων, ρυθμός συνωστισμού – ευστάθεια, ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων και ιδιότητα PASTA, νόμος του Little.
- Επισκόπηση στοχαστικών διαδικασιών για μοντέλα συστημάτων εξυπηρέτησης: ορισμός και μεταβατική συμπεριφορά Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου, οριακή συμπεριφορά και δομές με αμοιβές και κόστη.
- Μαρκοβιανά μοντέλα - βασικές τεχνικές και κλασικά συστήματα: Η ανάλυση μέσης τιμής για Μαρκοβιανά μοντέλα, απλές Μαρκοβιανές ουρές (ορισμοί, και βασικοί υπολογισμοί), ο ρυθμός διαπέρασης και οι εμφυτευμένες κατανομές, η  $M/M/1/1$  ουρά, η  $M/M/1$  ουρά και οι τροποποιήσεις της, η  $M/Mc$  ουρά, η  $M/M/c/c$  ουρά και το μοντέλο Engset.
- Γενικές Μαρκοβιανές ουρές: Η  $M/M/1$  ουρά με ομαδικές αφίξεις, η  $M/M/1$  ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις, η  $M/M/\infty$  ουρά με ομαδικές αφίξεις.
- Διδιάστατες Μαρκοβιανές ουρές και η μέθοδος των φάσεων: η μέθοδος των φάσεων, η μέθοδος των πιθανογεννητριών για διδιάστατες Μαρκοβιανές ουρές και εφαρμογές.
- Αντιστρεψιμότητα και Μαρκοβιανές ουρές: αντίστροφη στοχαστικής διαδικασίας, αντιστρέψιμες στοχαστικές διαδικασίες και εφαρμογές σε Μαρκοβιανές ουρές.
- Απλά Μαρκοβιανά δίκτυα ουρών: ορισμός των εννοιών του Μαρκοβιανού δικτύου, του απλού Μαρκοβιανού δικτύου και του δικτύου Jackson, μελέτη ανοικτών και κλειστών δικτύων Jackson.

## 5 Προτεινόμενα συγγράμματα

- Κύριο σύγγραμμα:
  - \* Οικονόμου, Αντωνίου (2023) *Θεωρία Ουρών Αναμονής*. Κάλλιπος Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. ISBN 9786185726614. Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 121051698.
- Επιπλέον σύγγραμμα:
  - \* Φακίνου, Δημητρίου (2008) *Ουρές Αναμονής*, 2η έκδοση. Εκδόσεις Συμμετρία Σ. Αθανασόπουλος & ΣΙΑ. ISBN: 9789602662069. Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 45392.

## 6 Σχέδιο μαθήματος

- **Μάθημα 01** Περιγραφή συστημάτων εξυπηρέτησης, ονοματολογία και μέτρα απόδοσης.
- **Μάθημα 02** Αναγεννητικότητα συστημάτων εξυπηρέτησης και μέτρα απόδοσης.
- **Μάθημα 03** Βασικά γενικά αποτελέσματα στη θεωρία συστημάτων εξυπηρέτησης.
- **Μάθημα 04** Εφαρμογές των βασικών αποτελεσμάτων - Η ανάλυση μέσης τιμής.
- **Μάθημα 05** Ασκήσεις στα βασικά αποτελέσματα και στην ανάλυση μέσης τιμής.
- **Μάθημα 06** Επισκόπηση Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου I.
- **Μάθημα 07** Επισκόπηση Μαρκοβιανών αλυσίδων συνεχούς χρόνου II.
- **Μάθημα 08** Εισαγωγή στις απλές Μαρκοβιανές ουρές. Οι ουρές  $M/M/1/1$ ,  $M/M/1$ ,  $M/M/1/k$ .
- **Μάθημα 09** Τροποποιήσεις της  $M/M/1$  ουράς με αποθαρρυνόμενους πελάτες, ανυπόμο-  
νους πελάτες, μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης κ.α.
- **Μάθημα 10** Η ουρά  $M/M/c$ . Σύγκριση ουρών με 1 και πολλούς υπηρέτες.
- **Μάθημα 11** Η ουρά  $M/M/c/c$  και το μοντέλο Engset. Ασκήσεις στις απλές Μαρκοβιανές ουρές.
- **Μάθημα 12** Εισαγωγή στις γενικές Μαρκοβιανές ουρές. Η μέθοδος των πιθανογεννητρι-  
ών. Η  $M/M/1$  ουρά με ομαδικές αφίξεις.
- **Μάθημα 13** Η  $M/M/1$  ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις.
- **Μάθημα 14** Ασκήσεις στις γενικές Μαρκοβιανές ουρές με τη μέθοδο των πιθανογεννη-  
τριών I.
- **Μάθημα 15** Ασκήσεις στις γενικές Μαρκοβιανές ουρές με τη μέθοδο των πιθανογεννη-  
τριών II.
- **Μάθημα 16** Εισαγωγή στις διδιάστατες Μαρκοβιανές ουρές. Η μέθοδος των φάσεων.
- **Μάθημα 17** Η μέθοδος των πιθανογεννητριών στις διδιάστατες Μαρκοβιανές ουρές.
- **Μάθημα 18** Αντίστροφη στοχαστικής διαδικασίας - Αντιστρέψιμες στοχαστικές διαδικα-  
σίες.
- **Μάθημα 19** Αντιστρεψιμότητα κι εφαρμογές στη Θεωρία Ουρών Αναμονής.
- **Μάθημα 20** Εισαγωγή στα δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης.
- **Μάθημα 21** Μελέτη δικτύων Jackson.
- **Μάθημα 22** Ασκήσεις στα δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης.
- **Μάθημα 23** Επαναληπτικές ασκήσεις - Παλαιά θέματα εξετάσεων.
- **Μάθημα 24** Επαναληπτικές ασκήσεις - Παλαιά θέματα εξετάσεων.
- **Μάθημα 25** Επαναληπτικές ασκήσεις - Παλαιά θέματα εξετάσεων.
- **Μάθημα 26** Επαναληπτικές ασκήσεις - Παλαιά θέματα εξετάσεων.