Ουρές Αναμονής 14.12.2022

Μάθημα 21

Δίκτυα Jackson

① Βασικό θεώρημα μορφής γινομένου

Έστω $\{Q(t)\}$ δίκτυο Jackson με $\lambda_i, \mu_j(n_j), P_{ij}$. και ρυθμούς διαπέρασης Λ_j μοναδική λύση των εξισώσεων κίνησης

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij} \quad , j=1,2\dots N$$

Επίσης ισχύει $\lambda = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{i0}$

Ορίζουμε τις ποσότητες $B_j^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(n_1)\dots\mu_j(n_j)} \quad , j=1\dots N$

1) Αν $B_j < +\infty \ \forall j$ το δίκτυο είναι ευσταθές

2) Αν το δίκτυο είναι ευσταθές, τότε η κατανομή ισορροπίας είναι

$$P(\underline{n}) = P(n_1,\dots n_N) = P_1(n_1)\dots P_N(n_N)$$

όπου $P_j(n_j) = B_j \dfrac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\dots\mu_j(n_j)} \quad j=1,2,\dots N, \ n_j \geq 0$

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $p(\underline{n})$ που δίνει το θεώρημα ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας.

$$p(\underline{n})\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_j)\mathbb{1}_{\{n_j>0\}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} p(\underline{n}-\underline{e_j})\lambda_j \mathbb{1}_{\{n_j>0\}} + \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{i0}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} P(\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{ij}\mathbb{1}_{\{n_j>0\}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\underline{n})\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{i0} +$$

$$+\mathbb{1}_{\{n_j>0\}}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(p(\underline{n})-\mu_j(n_j)-p(\underline{n}-\underline{e_j})\lambda_j - \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{i0}\right)\right)$$

$$=0$$

$$\Sigma_0 = p(\underline{n})\sum_{i=1}^{N}\lambda_i - \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{i0}$$

$$\Sigma_j = \sum_{j=1}^{N}\left(p(\underline{n})-\mu_j(n_j)-p(\underline{n}-\underline{e_j})\lambda_j - \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{ij}\right)$$

Αρκεί να δείξω ότι $\Sigma_0=0$, $\Sigma_j=0 \ \forall j=1,\dots N$

- $\Sigma_0 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\underline{n}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{i0}}{p(\underline{n})}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_i(n_i+1)P_{i0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)P_{i0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{i0}$$ που ισχύει από τις εξισώσεις κίνησης

$\Sigma_j = 0 \Leftrightarrow$

$$p(\underline{n})\mu_j(n_j) = p(\underline{n}-\underline{e_j})\lambda_j + \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i})\mu_i(n_i+1)P_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(\underline{n})}{p(\underline{n}-\underline{e_j})}\mu_j(n_j) = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i})}{p(\underline{n}-\underline{e_j})}\mu_i(n_i+1)P_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_j(n_j)}{p_j(n_j-1)}\mu_j(n_j) = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)}\mu_i(n_i+1)P_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda_j}{\mu_j(n_j)}\mu_j(n_j) = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\mu_i(n_i+1)}\mu_i(n_i+1)P_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij}$$ που ισχύει από την εξίσωση κίνησης για την ουρά j

② Ασκήσεις

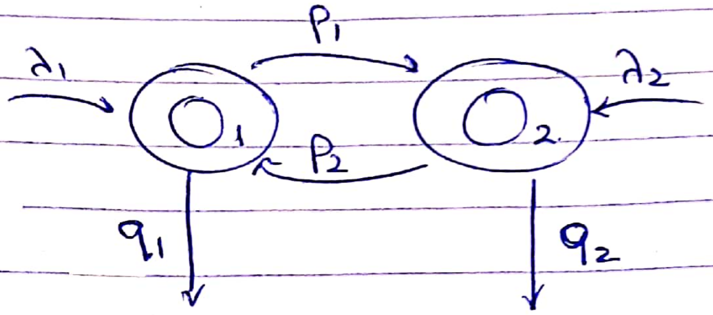
- Από κεφάλαιο 11: 1-4 (όχι 5)
- Παλιά θέματα

③ Οδηγίες για εξετάσεις

- Απλές μαρκοβιανές ουρές
- Μέθοδος πιθανογεννητριών
- Μοντελοποίηση ή Μέθοδος φάσεων ή Αντιστρεψιμότητα ή Ανάλυση Μέσης Τιμής
- Δίκτυα

④ Ασκήσεις

11.1 O_1, O_2 συστήματα εξυπηρέτησης
Η ουρά O_i έχει εξωτερικό ρυθμό αφίξεων λ_i
1 υπηρέτη και $Exp(\mu_i)$ χρόνους εξυπηρέτησης, $i=1,2$



→ Συνθήκη ευστάθειας
→ Κατανομή ισορροπίας

- Εξισώσεις κίνησης

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 + \Lambda_2 P_2 \\ \Lambda_2 = \lambda_2 + \Lambda_1 P_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 + \Lambda_2 P_2 \\ \Lambda_2 = \lambda_2 + P_1\lambda_1 + \Lambda_2 P_2 P_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 P_2}{1 - P_1 P_2} \\ \Lambda_2 = \dfrac{\lambda_2 + \lambda_1 P_1}{1 - P_1 P_2} \end{cases}$$

- Συνθήκη ευστάθειας

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 P_2}{1 - P_1 P_2} < \mu_1 \quad \text{και} \quad \frac{\lambda_2 + \lambda_1 P_1}{1 - P_1 P_2} < \mu_2$$

- Κατανομή ισορροπίας

$P_1(n_1) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1} \quad n_1 \geq 0 \qquad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad i=1,2$

$P_2(n_2) = (1-\rho_2)\rho_2^{n_2} \quad , n_2 \geq 0$

Άρα $P(n_1, n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2} \quad , \quad n_1, n_2 \geq 0$

5 Χρήση κατανομών ισορροπίας βασικών μεμονωμένων συστημάτων για τα δίκτυα

Στις ασκήσεις και στις εξετάσεις θεωρούμε γνωστά:

- $M/M/1 \quad p(n) = (1-\rho)\rho^n \quad n \geq 0 \quad , \rho < 1 \quad E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho}$

- $M/M/c \quad \rho < c$ (συνθήκη ευστάθειας)

- $M/M/\infty \quad p(n) = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} \quad , n \geq 0$

  $E[Q] = \rho$ και είναι πάντα ευσταθής

(6) Άσκηση 11.2

5 συστήματα $O_1, O_2, \dots O_5$

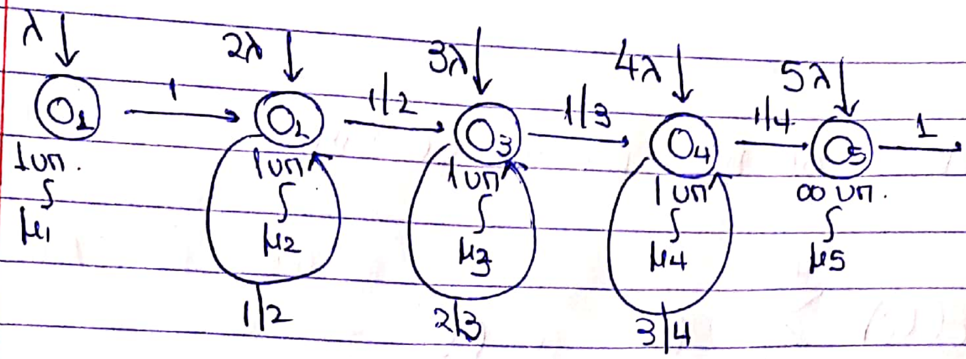
- Για $i = 1,2,3,4$
  O_i: εξωτερική διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό $i\lambda$
  1 υπηρέτη, $Exp(\mu_i)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
  Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης στο O_i

  Δρομολόγηση προς O_{i+1} με πιθ $\frac{1}{i}$

  Επανάληψη εξυπηρέτησης στον O_i με πιθ. $\frac{i-1}{i}$

- Για $i=5$
  O_5: εξωτερική διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό 5λ
  άπειρους υπηρέτες, $Exp(\mu_5)$ χρόνους εξυπηρέτησης
  Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης στον O_5: αναχώρηση από το δίκτυο

1) Συνθήκη ευστάθειας
2) Κατανομή ισορροπίας # πελατών
3) Μέσος # πελατών στο δίκτυο
4) Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο δίκτυο
5) Κατανομή # επισκέψεων πελάτη στο σύστημα O_i



- Εξισώσεις Κίνησης

$$\Lambda_1 = \lambda$$

$$\Lambda_2 = 3\lambda + \frac{\Lambda_2}{2} \Rightarrow \Lambda_2 = 6\lambda$$

$$\Lambda_3 = 3\lambda + \frac{\Lambda_2}{2} + \frac{2\Lambda_3}{3} \Rightarrow \Lambda_3 = 18\lambda$$

$$\Lambda_4 = 4\lambda + \frac{\Lambda_3}{3} + \frac{3\Lambda_4}{4} \Rightarrow \Lambda_4 = 40\lambda$$

$$\Lambda_5 = 5\lambda + \frac{\Lambda_4}{4} \Rightarrow \Lambda_5 = 15\lambda$$

- Συνθήκη ευστάθειας (4 M/M/1 ουρές + 1 M/M/∞ ουρά)

$\lambda_1 < \mu_1, \; 6\lambda < \mu_2, \; 18\lambda < \mu_3, \; 40\lambda < \mu_4$

$$\Leftrightarrow \lambda = \min\left\{\mu_1, \frac{\mu_2}{6}, \frac{\mu_3}{18}, \frac{\mu_4}{40}\right\}$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{6\lambda}{\mu_2}, \quad \rho_3 = \frac{18\lambda}{\mu_3}, \quad \rho_4 = \frac{40\lambda}{\mu_4}, \quad \rho_5 = \frac{15\lambda}{\mu_5}$$

- $$p(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = \left(\prod_{i=1}^{4} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}\right) e^{-\rho_5} \frac{\rho_5^{n_5}}{n_5!}$$

- Μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} + \rho_5$$

- Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο δίκτυο

(νόμος Little στο δίκτυο)

$$E(Q) = \lambda_{δικτύου} E(S)$$

$$\Rightarrow E(S) = \frac{E(Q)}{\lambda_{δικτύου}}$$

$$\Rightarrow E(S) = \frac{E(Q)}{\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda} = \frac{E(Q)}{15\lambda}$$

- Κατανομή αριθμού επισκέψεων πελάτη στην O_i

Για τον σταθμό i:

Έστω N_i = #επισκέψεων επιλεγμένου πελάτη του δικτύου

- $$Pr[N_1=n] = \begin{cases} Pr\left[\begin{matrix}\text{ο επιλεγμένος πελάτης} \\ \text{μπήκε από άλλο σταθμό}\end{matrix}\right], & n=0 \\ Pr\left[\begin{matrix}\text{ο επιλεγμένος πελάτης} \\ \text{μπήκε από τον σταθμό 1}\end{matrix}\right], & n=1 \end{cases}$$

$$Pr[N_1=n] = \begin{cases} \dfrac{2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda}{15\lambda} = \dfrac{14}{15}, & n=0 \\ \dfrac{1}{15}, & n=1 \end{cases}$$

- $$Pr[N_2=n] \begin{cases} Pr\left[\begin{matrix}\text{ο επιλεγμένος πελάτης} \\ \text{μπήκε μέσω των 3,4,5}\end{matrix}\right], & n=0 \\ Pr\left[\begin{matrix}\text{ο επιλεγμένος πελάτης μπήκε μέσω των 1,2} \\ \text{και έκανε } n-1 \text{ επαναλήψεις εξυπ. στον 2}\end{matrix}\right] & \\ & n\geq 1 \end{cases}$$

$$Pr[N_2=n] = \begin{cases} \dfrac{12}{15}, & n=0 \\ \dfrac{3}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2}, & n\geq 1 \end{cases}$$

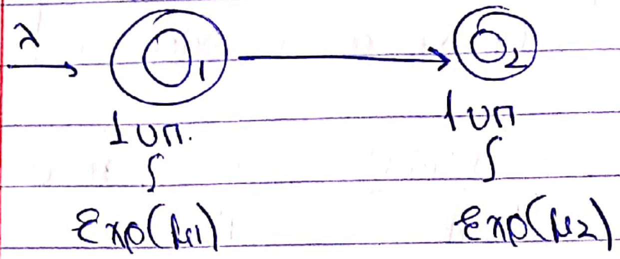
$$Pr[N_3=n] = \begin{cases} \dfrac{9}{15}, & n=0 \\ \dfrac{6}{15}\,\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$Pr[N_4=n] = \begin{cases} \dfrac{5}{15}, & n=0 \\ \dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$Pr[N_5=n] = 1$$

(7) Άσκηση 9.1

production blocking



Μοντελοποιήστε το σύστημα ως ΜΑΣΧ και λύστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης του

• Μοντελοποίηση ΜΑΣΧ.