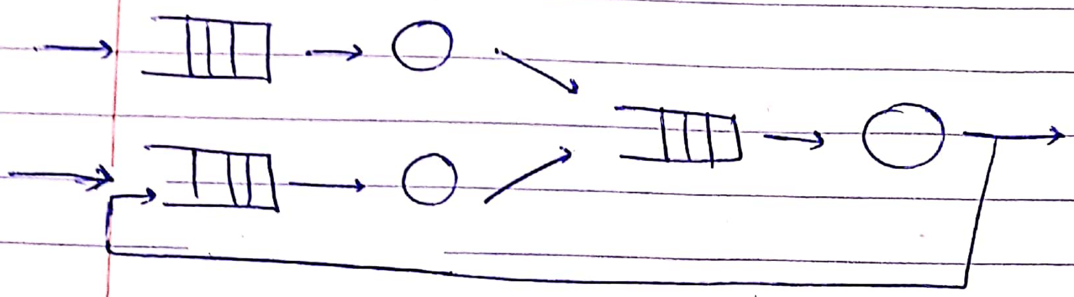
Ουρές Αναμονής 12.12.2022

μάθημα 20

Δίκτυα Συστημάτων Εξυπηρέτησης

① Σχήμα



② Βασική στοχαστική διαδικασία σε δίκτυο

$\underline{Q}(t) = (Q_1(t), \dots Q_N(t))$

$N = \#$ σταθμών / κόμβων του δικτύου

$Q_i(t) = \#$ πελατών στο σταθμό i, $i = 1, \dots N$

Χώρος καταστάσεων της $\underline{Q}(t) \subseteq \mathbb{N}_0^N$

$\underline{n} = (n_1, \dots n_N)$ τυπική κατάσταση

$\underline{e_i} = (0, 0, \dots 1, 0, 0, \dots)$ i-μοναδιαίο διάνυσμα

θέση i

Τυπικές μεμονωμένες μεταβάσεις:

$\underline{n} \longrightarrow \underline{n} + \underline{e_i}$ εξωτερική άφιξη στον σταθμό i

$\underline{n} \longrightarrow \underline{n} - \underline{e_j}$ εξωτερική αναχώρηση στον σταθμό j

$\underline{n} \longrightarrow \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i}$ αναχώρηση από $j \rightarrow$ άφιξη σε i

(μετακίνηση πελάτη από τον σταθμό j στον σταθμό i)

3 Τύποι Δικτύων

Δίκτυα

- Μαρκοβιανά $\{\underline{Q}(t)\}$ ΜΑΣΧ
  - Μη Απλά
    $\{\underline{Q}(t)\}$ έχει ειδικές μεταβάσεις
  - Απλά
    $\{\underline{Q}(t)\}$ έχει μόνο μεμονωμένες μεταβάσεις

    $$\left(\begin{array}{l} \underline{n} \longrightarrow \underline{n} + \underline{e_i} \\ \underline{n} \longrightarrow \underline{n} - \underline{e_j} \\ \underline{n} \longrightarrow \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i} \end{array}\right)$$

    - Όχι Jackson
    - Jackson
      → θα επικεντρωθούμε εδώ
- Μη Μαρκοβιανά $\{\underline{Q}(t)\}$ όχι ΜΑΣΧ

(4) Ρυθμοί αφίξεων / εξυπηρέτησης σε απλά Μαρκοβιανά δίκτυα

$\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ Απλό Μαρκοβιανό Δίκτυο

Ορίζουμε $\lambda_i(\underline{n}) = q(\underline{n}, \underline{n} + \underline{e_i})$
ρυθμός εξωτερικών αφίξεων στον σταθμό i

$\mu_{ji}(\underline{n}) = q(\underline{n}, \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i})$
ρυθμός μεταβάσεων πελατών $j \longrightarrow i$

$\mu_{j0}(\underline{n}) = q(\underline{n}, \underline{n} - \underline{e_j})$
ρυθμός αναχωρήσεων από την j

$\mu_j(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{N} \mu_{ji}(\underline{n})$ ρυθμός εξυπηρετήσεων στην ουρά j

$P_{ji}(\underline{n}) = \dfrac{\mu_{ji}(\underline{n})}{\mu_j(\underline{n})}$ πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη προς τον i όταν έχει τελειώσει την εξυπηρέτησή του στον j

$P_{j0}(\underline{n}) = \dfrac{\mu_{j0}(\underline{n})}{\mu_j(\underline{n})}$ πιθανότητα αναχώρησης πελάτη από το δίκτυο που έχει τελειώσει την εξυπηρέτησή του στον j

5 Δίκτυα Jackson

Θα λέμε ότι έχουμε δίκτυο Jackson $\Leftrightarrow$
$\{\underline{Q}(t)\}$ απλό μαρκοβιανό δίκτυο και

$\lambda_i(\underline{n}) = \lambda_i$ (ο ρυθμός εξωτερικών αφίξεων στον i δεν εξαρτάται από την κατάσταση)

$\mu_j(\underline{n}) = \mu_j(n_j)$ (ο ρυθμός εξυπηρετήσεων στον j εξαρτάται από τον #πελατών στον j)

$P_{ji}(\underline{n}) = P_{ji}$
$P_{jo}(\underline{n}) = P_{jo}$
ιδιότητα μαρκοβιανών διαδρομών

(η δρομολόγηση γίνεται χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο συνωστισμός)

6 Διάκριση δικτύων ως προς τις εξωτερικές μεταβάσεις

- Κλειστό $\Leftrightarrow$ απαγορεύονται εξωτερικές αφίξεις και αναχωρήσεις. Έχω πεπερασμένο πλήθος πελατών που ανακυκλώνονται στο δίκτυο

- Ανοιχτό $\Leftrightarrow$ όχι κλειστό

7 Πίνακας Μαρκοβιανών Διαδρομών

Σε ανοιχτό δίκτυο Jackson, ορίζω έναν στοχαστικό πίνακα

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & & N \end{array} \\
\text{εξωτερικό του δικτύου} \rightarrow 0 & \\
1 & \\
2 & \\
N &
\end{array}$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & \dots & \frac{\lambda_N}{\lambda} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Ο $\mathbb{P}$ λέγεται πίνακας μαρκοβιανών διαδρομών.
Υποθέτουμε ότι αντιστοιχεί σε αδιαχώριστη ΜΑΔΧ.

8 Ορισμός: Ρυθμός διαπέρασης σταθμών

Σε (ανοιχτό) δίκτυο Jackson

Λ_i = ρυθμός διαπέρασης του σταθμού i
= μέσος # πελατών που εισέρχονται στον i ανά χρονική μονάδα
↓ λόγω ευστάθειας δικτύου
= μέσος # πελατών που εξέρχονται από τον i ανά χρονική μονάδα

Πρόβλημα

Αν μου δίνουν τα λ_i, τα $\mu_j(n_j)$
P_{ji}, $i,j = 1, 2, \dots N$ $n_j \geq 0$

Πώς υπολογίζω τα Λ_i;

Scanned with CamScanner

Θεώρημα: Οι ρυθμοί διαπέρασης είναι η μοναδική λύση του συστήματος

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij} \quad , j=1, \dots N$$

επίσης $\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{i0} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ (= \lambda)$

Απόδειξη Λ_j = μέσος ρυθμός αφίξεων στον j ανά χρονική μονάδα

= μέσος ρυθμός εξωτερικών αφίξεων στον j (ανά χρονική μον
$+ \sum_{i=1}^{N}$ μέσος ρυθμός αφίξεων από τον i που δρομολογούνται στον j

$= \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij}$ Δείξαμε ότι $(\Lambda_j, j=1, \dots N)$ είναι λύση του συστήματος

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι και η μοναδική λύση.

Αθροίζοντας τις εξισώσεις για τα Λ_j για όλα τα j

$$\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j = \lambda + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i \sum_{j=1}^{N} P_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j = \lambda + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i (1 - P_{i0})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{i0} = \lambda.$$

Οι σχέσεις που ικανοποιούν οι ρυθμοί Λ_j $j=1,..N$

$$\Lambda_j = \Lambda_0 \frac{\lambda_j}{\lambda} + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{ij} \quad j=1,\dots N$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i P_{i0} \quad \Lambda_0 = \lambda$$

Εξισώσεις ισορροπίας της ΜΑΔΧ με πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1/\lambda & \lambda_2/\lambda & \dots & \lambda_N/\lambda \\ P_{10} & P_{11} & \dots & & P_{1N} \\ \vdots & P_{21} & \dots & & \dots \\ P_{N0} & \dots & \dots & & P_{NN} \end{bmatrix}$$

Που είναι αδιαχώριστη
Άρα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή $(\Pi_0, \dots \Pi_N)$
και κάθε λύση του συστήματος θα είναι πολλαπλάσιο
της. Άρα $(\Lambda_0, \dots \Lambda_N) = c(\Pi_0, \dots \Pi_N)$

Όμως $\Lambda_0 = \lambda \rightarrow c\Pi_0 = \lambda \Rightarrow c = \dfrac{\lambda}{\Pi_0}$

Επομένως τα (Λ_i) είναι η μοναδική λύση του
συστήματος των εξισώσεων κίνησης.

(9) Κατανομή ισορροπίας (ανοιχτών) Δικτύων Jackson

Θεώρημα: Έστω $\{\underline{Q}(t)\}$ δίκτυο Jackson με παραμέτρους λ_i, $\mu_j(n_j)$, P_{ij} και Λ_j ρυθμοί διαπέρασης.
Θέτω
$$B_j^{-1} = 1 + \sum_{n_j=1}^{\infty} \frac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\dots\mu_j(n_j)} \quad , j=1,\dots N$$

1) Αν $B_j^{-1} < +\infty$ για όλα τα $j=1,\dots N$
η $\{\underline{Q}(t)\}$ είναι ευσταθής

2) Εφόσον $\{\underline{Q}(t)\}$ ευσταθής, η κατανομή ισορροπίας της είναι:
$$P(\underline{n}) = P_1(n_1)P_2(n_2)\dots P_N(n_N) \quad \underline{n} \in \mathbb{N}_0^N$$

όπου
$$P_j(n_j) = B_j \frac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\dots\mu_j(n_j)} \quad n_j \in \mathbb{N}_0,\ j=1,\dots N$$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξω ότι η $P(\underline{n})$ που δίνει το θεώρημα ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας της $\{\underline{Q}(t)\}$