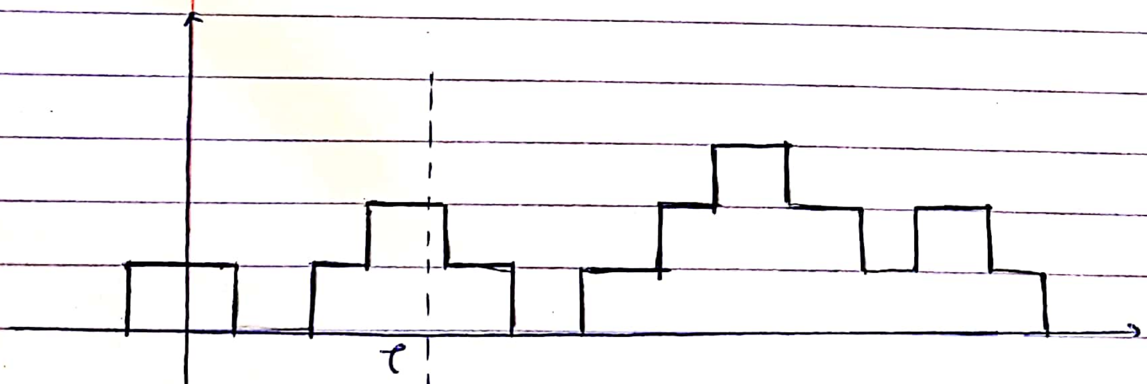
Ουρές Αναμονής 05.12.2022

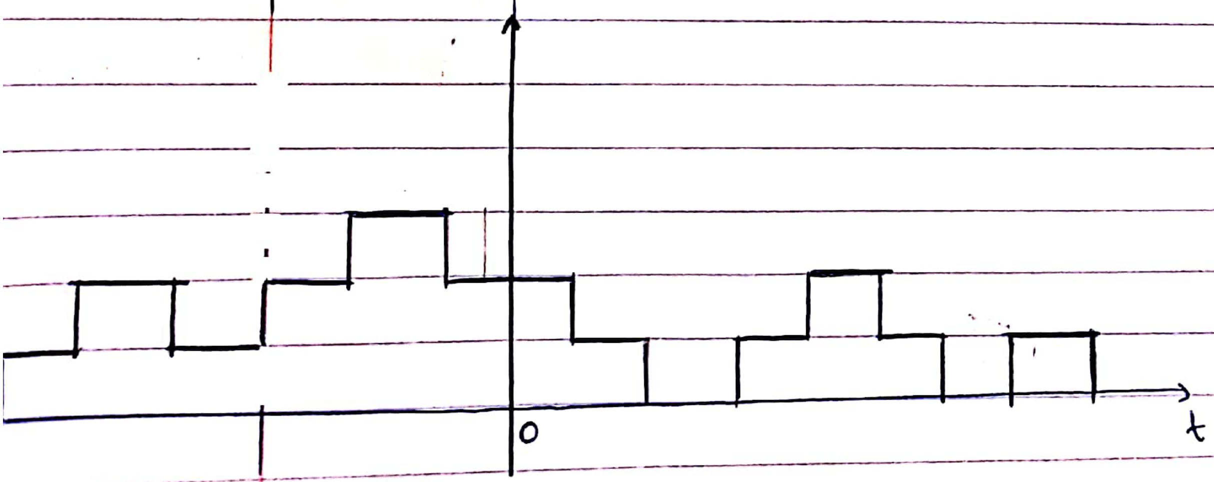
Μάθημα 18

Κεφάλαιο 10:
Αντίστροφη Στοχαστικής Διαδικασίας - Αντιστρέψιμες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εφαρμογές στις Ουρές

① Ορισμός αντίστροφης

Αν $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ στοχαστική διαδικασία και $\tau \in \mathbb{R}$, η στοχαστική διαδικασία $\{\hat{X}_\tau(t) : t \in \mathbb{R}\}$ με $\hat{X}_\tau(t) = X(\tau - t)$ $t \in \mathbb{R}$ λέγεται αντίστροφη της $X(t)$ ως προς την χρονική στιγμή τ.
Για $\tau = 0$, η $\{\hat{X}_0(t)\}$ λέγεται τυπική αντίστροφη και συμβολίζεται με $\{\hat{X}(t)\}$.





- Διαισθητικά, η αντίστροφη της $\{X(t)\}$ ως προς τ προκύπτει μετακινώντας την αρχή μέτρησης του χρόνου στο τ και αλλάζοντας την φορά του χρόνου.

② Ορισμός αντιστρέψιμης στοχαστικής διαδικασίας

Έστω $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ στοχαστική διαδικασία.
Η $\{X(t)\}$ λέγεται αντιστρέψιμη αν και μόνο αν
$$\{X(t)\} \stackrel{s.t}{=} \{\hat{X}_\tau(t)\}$$
(στοχαστικά ισοδύναμη με την αντίστροφή της)
Δηλαδή αν $\forall\ t_1 < \dots < t_n$
$(X(t_1), \dots X(t_n))$, $(\hat{X}(t_1), \dots \hat{X}(t_n))$ ισόνομες

πχ. Μια ανανεωτική διαδικασία είναι αντιστρέψιμη

- Διαισθητικά, $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη σημαίνει ότι έχει την ίδια πιθανοθεωρητική συμπεριφορά προς τις 2 φορές του χρόνου.

③ Αντίστροφη Μαρκοβιανής Αλυσίδας Συνεχούς Χρόνου

Θεώρημα: Έστω $\{X(t): t \in \mathbb{R}\}$ αδιαχώριστη και στάσιμη ΜΑΣΧ με κατανομή ισορροπίας $(P_j,\ j=0,1,2\ldots)$ και ρυθμούς q_{ij}.
Η αντίστροφη $\{\hat{X}(t)\}$ είναι αδιαχώριστη, στάσιμη ΜΑΣΧ με κατανομή ισορροπίας $(\hat{P_j})$ με $\hat{P_j} = P_j$ $j=0,1,2\ldots$ και ρυθμούς $\hat{q_{ij}} = \dfrac{P_j q_{ji}}{P_i}$, $i \neq j$

- Διαισθητικά.

1) Δοθέντος του παρόντος, το παρελθόν και το μέλλον της $\{X(t)\}$ είναι ανεξάρτητα → το μέλλον και το παρελθόν της $\{\hat{X}(t)\}$ είναι ανεξάρτητα.

2) Αν $i \leftrightarrow j$ στην $\{X(t)\}$, υπάρχει μονοπάτι
$i \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_n \to j \to j_1 \to \ldots \to j_m \to i$
ώστε να έχω θετικούς ρυθμούς.
Επομένως έχουμε και το μονοπάτι
$i \to j_m \to \ldots \to j \to i_n \to \ldots \to i_1 \to i$
ώστε $i \leftrightarrow j$ στην $\{\hat{X}(t)\}$.

3) $\hat{P_j} \doteq$ ποσοστό χρόνου στην j στην $\{\hat{X}(t)\}$
$=$ ποσοστό χρόνου στην j στην $\{X(t)\} \doteq P_j$
(η αλλαγή φοράς δεν παίζει ρόλο)

4) $\hat{P_i} \hat{q_{ij}} =$ ρυθμός μεταβάσεων $i \to j$ στην $\{\hat{X}(t)\}$
$=$ ρυθμός μεταβάσεων $j \to i$ στην $\{X(t)\}$
$= P_j q_{ji}$

Άρα $\hat{q_{ij}} = \dfrac{P_j q_{ji}}{\hat{P_i}} = \dfrac{P_j q_{ji}}{P_i}$

Αντιστροφή :

- $\hat{P}_j = \lim_{t \to +\infty} Pr[\hat{X}(t) = j] = \lim_{t \to +\infty} Pr[X(-t) = j] = P_j$

- $\hat{q}_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{Pr[\hat{X}(t+h) = j \mid \hat{X}(t) = i]}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{Pr[X(-t-h) = j \mid X(-t) = i]}{h}$

(Bayes)

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{Pr[X(-t-h) = j]\, Pr[X(-t) = i \mid X(-t-h) = j]}{Pr[X(-t) = i] \cdot h}$

$= \frac{P_j}{P_i} q_{ji}$

④ Πότε μια ΜΑΣΧ είναι αντιστρέψιμη

Θεώρημα: Έστω $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ΜΑΣΧ αδιαχώριστη, στάσιμη με κατανομή ισορροπίας $(P_j, j = 0, 1, 2 \ldots)$
Η $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν
$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \quad \forall i \neq j$
(εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας)

$$\{X(t)\} \text{ αντιστρέψιμη}$$
$$\Updownarrow$$
$$\hat{q}_{ij} = q_{ij} \quad \forall i \neq j$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{P_j q_{ji}}{P_i} = q_{ij} \quad \forall i \neq j$$
$$\Updownarrow$$
$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \quad \forall i \neq j$$

5 Εξισώσεις ισορροπίας - Είδη

- Εξισώσεις (πλήρους) ισορροπίας

$$\underbrace{p_j \sum_{i \neq j} q_{ji}}_{\substack{\text{ρυθμός εξόδου} \\ \text{από την } j}} = \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}}_{\substack{\text{ρυθμός εισόδου} \\ \text{στην } j}} \quad \forall j$$

ΙΣΧΥΟΥΝ ΠΑΝΤΑ

- Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$\forall \; A \subseteq X$ (χώρος καταστάσεων)

$$\underbrace{\sum_{j \in A} p_j \sum_{i \in A^c} q_{ji}}_{\substack{\text{ρυθμός εξόδου} \\ \text{από το } A}} = \underbrace{\sum_{i \in A^c} p_i \sum_{j \in A} q_{ij}}_{\substack{\text{ρυθμός εισόδου} \\ \text{στο } A}}$$

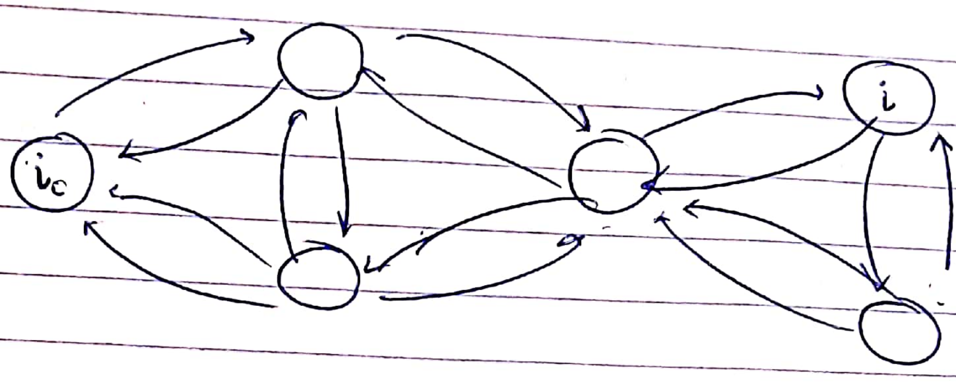
ΙΣΧΥΟΥΝ ΠΑΝΤΑ

- Εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας

$$\underbrace{p_j q_{ji}}_{\substack{\text{ρυθμός} \\ \text{μεταβάσεων} \\ j \to i}} = \underbrace{p_i q_{ij}}_{\substack{\text{ρυθμός} \\ \text{μεταβάσεων} \\ i \to j}} \quad \forall i,j, \; i \neq j$$

ΙΣΧΥΟΥΝ ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΕΣ

6 Υπολογισμός κατανομής ισορροπίας σε αντιστρέψιμες ΜΑΣΧ



Αν $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη ΜΑΣΧ, αδιαχώριστη, η κατανομή ισορροπίας μπορεί να βρεθεί:

- Επιλέγω αυθαίρετα μια κατάσταση αναφοράς i_0 (συνήθως $i_0 = 0$ σε ΜΑΣΧ που αναπαριστούν ουρές)

- Για κάθε κατάσταση i βρίσκω μονοπάτι που να την συνδέει με την i_0

$$i_0 \to i_1 \to \dots \to i_m \to i$$

Από τις εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας

$$p_{i_0} q_{i_0 i_1} = p_{i_1} q_{i_1 i_0} \Rightarrow p_{i_1} = \frac{q_{i_0 i_1} p_{i_0}}{q_{i_1 i_0}}$$

Ομοίως $p_{i_2} = \dfrac{q_{i_1 i_2} p_{i_1}}{q_{i_2 i_1}}$

Τελικά

$$P_i = P_{i_0}\left(\frac{q_{i_0 i_1} \dots q_{i_m i}}{q_{i_1 i_0} \dots q_{i i_m}}\right)$$

Άρα, ο υπολογισμός γίνεται σαν η $\{X(t)\}$ να ήταν αλυσίδα γέννησης-θανάτου

Στο τέλος, βρίσκω την P_{i_0} με την εξίσωση κανονικοποίησης

7 Κριτήριο Αντιστρεψιμότητας Kolmogorov

Θεώρημα: Έστω $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη και στάσιμη ΜΑΣΧ. Η $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν για κάθε κύκλο καταστάσεων

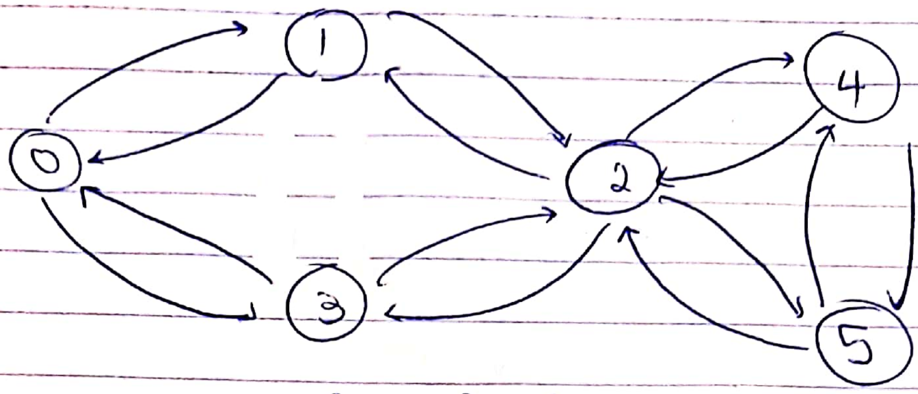
$i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_n \to i_0$ ισχύει ότι

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_n i_0} = q_{i_0 i_n} \dots q_{i_2 i_1} q_{i_1 i_0}$$

(ίδιο γινόμενο ρυθμών κατά τις 2 φορές του χρόνου)

Παρατήρηση: Αρκεί να ισχύει αυτό για απλούς (χωρίς επανάληψη καταστάσεων) κύκλους μήκους τουλάχιστον 3

8 Παράδειγμα



Αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow$ $q_{01}q_{12}q_{23}q_{30} = q_{03}q_{32}q_{21}q_{10}$

και $q_{24}q_{45}q_{52} = q_{25}q_{54}q_{42}$

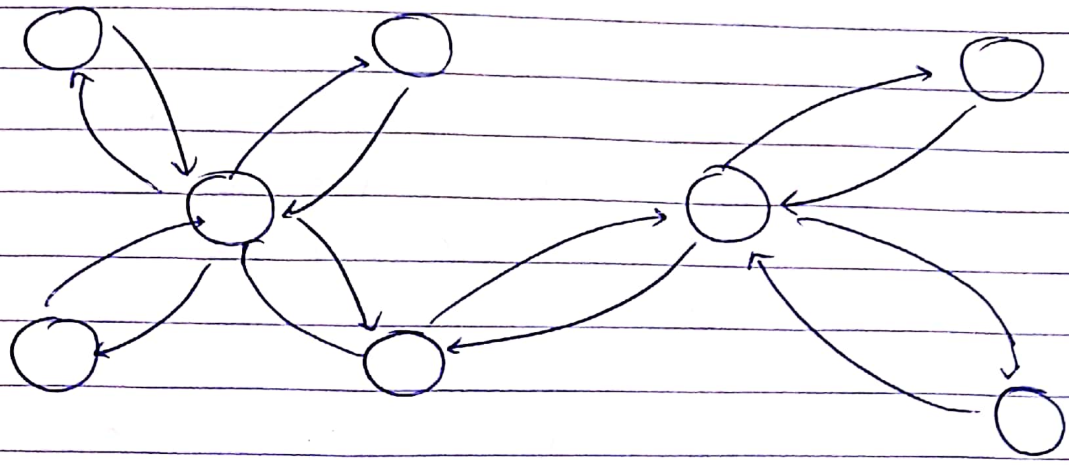
9 Επιπλέον εργαλείο υπολογισμού κατανομών ισορροπίας

- Με το κριτήριο Kolmogorov αν η $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη.
- Αν ναι, χρησιμοποιώ τον αλγόριθμο υπολογισμού για αντιστρέψιμες ΜΑΣΧ

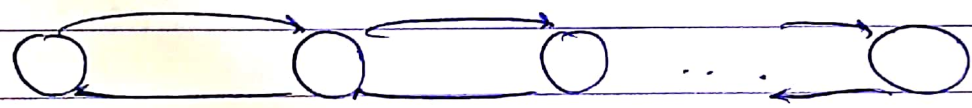
Παρατήρηση: Οι ΜΑΣΧ με διάγραμμα ρυθμών αμφίδρομα δέντρα είναι πάντα αντιστρέψιμες.

Πχ

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ



• Ειδικότερα, οι διαδικασίες γέννησης - θανάτου είναι αντιστρέψιμες.



(10) Παράδειγμα : M/M/2 ουρά με ετερογενείς υπηρέτες

Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ

2 υπηρέτες $\rightarrow$ 1ος $Exp(\mu_1)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

$\searrow$ 2ος $Exp(\mu_2)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

$K = +\infty$, FCFS

Υποθέτουμε ότι όταν ένας πελάτης αφιχθεί σε κενό σύστημα επιλέγει τυχαία (με πιθανότητα 1/2) από ποιον θα εξυπηρετηθεί

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t ΟΧΙ ΜΑΣΧ

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
1	2	$Exp(\lambda)$
	0	?

είναι είτε $Exp(\mu_1)$ είτε $Exp(\mu_2)$ (εξαρτάται από ποιον εξυπηρετείται)

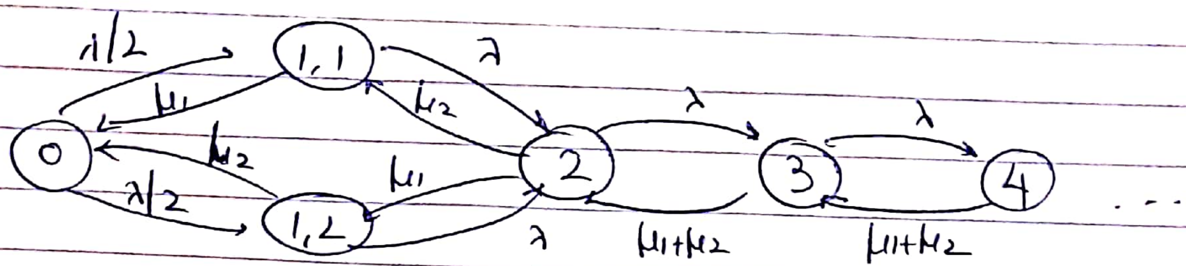
Θέτω $I(t)$ = απασχ. υπηρέτης όταν $Q(t)=1$

Η $\{(Q(t), I(t))\}$ είναι ΜΑΣΧ.

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	$(1,1)$	$Exp(\lambda/2)$
	$(1,2)$	$Exp(\lambda/2)$
$(1,1)$	2	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu_1)$
$(1,2)$	2	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu_2)$
2	3	$Exp(\lambda)$
	$(1,1)$	$Exp(\mu_2)$
	$(1,2)$	$Exp(\mu_1)$
$\vdots$		
$n \geq 3$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu_1+\mu_2)$

Όλοι οι χρόνοι Exp $\rightarrow \{(Q(t), I(t))\}$ ΜΑΣΧ

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



Αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$ ...

$q_{0(1,1)}q_{(1,1)2}q_{2(1,2)}q_{(1,2)0} = q_{0(1,2)}q_{(1,2)2}q_{2(1,1)}q_{(1,1)0}$

$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}\lambda\mu_1\mu_2 = \frac{\lambda}{2}\lambda\mu_2\mu_1$ (ισχύει γιατί διαλέγει ισοπίθανα)

$$P_{(1,1)} = \frac{P_0}{2\mu_1}$$

$$P_{(1,2)} = \frac{\lambda P_0}{2\mu_2}$$

$$P_n = \frac{\lambda^n P_0}{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^{n-2}}, \ n \geq 2$$

Κανονικοποίηση για την P_0

$$P_0\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^{n-2}}\right) = 1$$

Ευστάθεια:

$$\frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-2} < +\infty \Rightarrow \lambda < \mu_1+\mu_2$$

Τότε $$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}\right)^{-1}$$