Ουρές Αναμονής 30.11.2022

Μάθημα 17

Διδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές
Μέθοδος φάσεων
Μέθοδος πιθανογεννητριών

① Η γενική μέθοδος των φάσεων

Ιδέα: Μπορούμε να προσεγγίσουμε, οσοδήποτε κοντά θέλουμε, την συνάρτηση κατανομής μιας $X \geq 0$ από μίξη αθροισμάτων ανεξάρτητων εκθετικών.

Για κάθε τ.μ. $X \geq 0$, $\forall\, \varepsilon$ το υπάρχει τ.μ. Y:

$$Y = \begin{cases} Y_{1,1} & \text{, με πιθανότητα } p_1 \\ Y_{2,1} + Y_{2,2} & \text{, με πιθανότητα } p_2 \\ \vdots & \\ Y_{n,1} + Y_{n,2} + \dots + Y_{n,n} & \text{, με πιθανότητα } p_n \end{cases}$$

όπου $Y_{i,j} \sim Exp(\lambda_{i,j})$ ανεξάρτητες, ώστε

$$\sup_x \left| F_X(x) - F_Y(x) \right| < \varepsilon$$

Άρα το σύνολο των μίξεων αθροισμάτων ανεξάρτητων εκθετικών είναι πυκνό στο σύνολο των μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών.

(2) Παράδειγμα

Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμό λ

Χρόνοι εξυπηρέτησης B, $E[B] = \mu$, $Var[B] = \sigma^2$

1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα

Θέλω μια μίξη εκθετικής και Erlang που να προσεγγίζει την B (να έχει ίδιες ροπές)

Έστω $Y = \begin{cases} Exp(\nu), \text{ με πιθανότητα } p \\ Erlang(2,\nu), \text{ με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$

Θέλω $E[B] = E[Y]$ και $Var[B] = Var[Y]$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= p\frac{1}{\nu} + (1-p)\frac{2}{\nu} \\ \sigma^2 &= p\frac{1}{\nu^2} + (1-p)\frac{2}{\nu^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Βρίσκω τα } p, \nu \text{ συναρτήσει των } \mu, \sigma^2$$

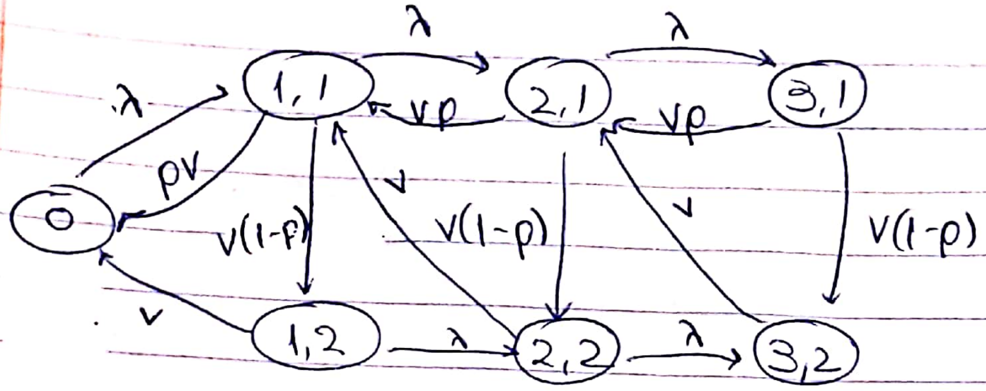
Το σύστημα προσεγγίζεται από ένα όμοιο, με την Y στην θέση της B.

Έστω $Q(t)$ = # πελατών στο προσεγγιστικό σύστημα

Έστω $S(t)$ = φάση πελάτη που εξυπηρετείται

Η $\{(Q(t), S(t))\}$ έχει χώρο καταστάσεων

$\{0, (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), \dots\}$



3) Μέθοδος πιθανογεννητριών για διδιάστατες μαρκοβιανές ουρές

$\{(Q(t), I(t))\}$ ΜΑΣΧ

συνήθως $Q(t) \in \{0,1,2,\dots\}$, $I(t)$ παίρνει τιμές σε πεπερασμένο σύνολο I

Για κάθε συγκεκριμένο $i \in I$, πολλαπλασιάζω με z^n την εξίσωση ισορροπίας για το (n,i) και αθροίζω για όλα τα n.

Προκύπτουν εξισώσεις για τις μερικές πιθανογεννήτριες

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,i) z^n \quad , \quad i \in I$$

Λύνουμε το σύστημα κλπ.

④ Παράδειγμα: M/M/1 ουρά με ενεργές και ανενεργές περιόδους εξυπηρέτησης

Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ

$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα

Ο υπηρέτης εναλλάσσεται σε ενεργές περιόδους και σε ανενεργές.

$Exp(z)$: διάρκεια ενεργής περιόδου

$Exp(\theta)$: διάρκεια ανενεργής περιόδου.

$\{Q(t)\}$ όχι ΜΑΣΧ.

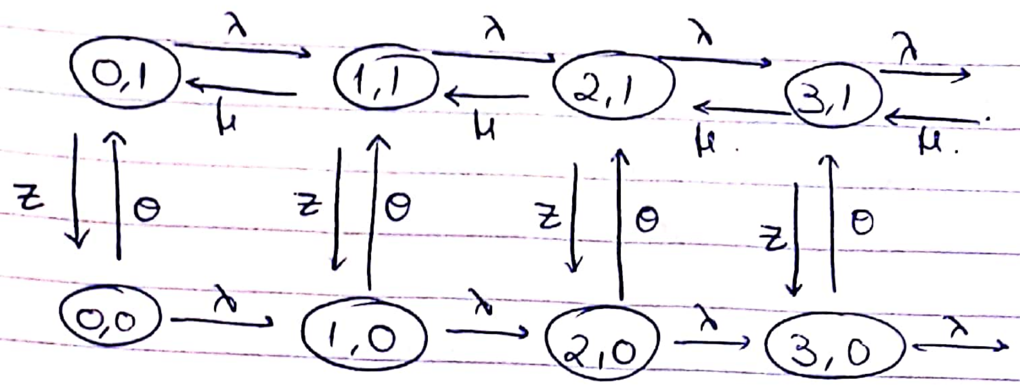
$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{το σύστημα σε ενεργή περίοδο την στιγμή } t \\ 0, & \text{το σύστημα σε ανενεργή περίοδο την στιγμή } t \end{cases}$$

Για την $\{(Q(t), I(t))\}$ έχουμε:

Κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
$(0,0)$	$(0,1)$	$Exp(\theta)$
	$(1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$Exp(z)$
	$(1,1)$	$Exp(\lambda)$
⋮		
$(n,0)$, $n \geq 1$	$(n,1)$	$Exp(\theta)$
	$(n+1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(n,1)$, $n \geq 1$	$(n,0)$	$Exp(z)$
	$(n+1,1)$	$Exp(\lambda)$
	$(n-1,1)$	$Exp(\mu)$

Όλοι οι χρόνοι εκθετικοί

Άρα $\{(Q(t), I(t))\}$ ΜΑΣΧ



Εξισώσεις ισορροπίας

$$P_{(0,0)}(\lambda+\theta) = P_{(0,1)}\cdot z \qquad (1)$$

$$(\lambda+\theta)P_{(n,0)} = zP_{(n,1)} + \lambda P_{(n-1,0)}, \quad n \geq 1 \qquad (2)$$

$$(\lambda+z)P_{(0,1)} = \theta P_{(0,0)} + \mu P_{(1,1)} \qquad (3)$$

$$(\lambda+\mu+z)P_{(n,1)} = \theta P_{(n,0)} + \mu P_{(n+1,1)} + \lambda P_{(n-1,1)}, \quad n \geq 1 \quad (4)$$

Ορίζω

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,0)} z^n, \quad |z| \leq 1$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,1)} z^n, \quad |z| \leq 1$$

Πολλαπλασιάζω την (1) με z^0 + $\sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n$

$$(\lambda+\theta)\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,0)} z^n = z\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,1)} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{(n-1,0)} z^n$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\theta) P_0(z) = z P_1(z) + \lambda z P_0(z)$$

$$\Leftrightarrow P_1(z) = \frac{(\lambda+\theta-\lambda z) P_0(z)}{z} \quad (5)$$

$(3) \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (4) \times z^n$

$$(\lambda+z+\mu) P_1(z) - \mu P_{(0,1)} = \theta P_0(z) + \lambda z P_1(z) + \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_{(n+1,1)} z^n$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+z+\mu) P_1(z) - \mu P_{(0,1)} = \theta P_0(z) + \lambda z P_1(z) + \frac{\mu}{z}\left(P_1(z) - P_{(0,1)}\right) \quad (6)$$

Αντικαθιστώ την (5) στην (6)

$$(\lambda+z+\mu)\left[\frac{(\lambda+\theta-\lambda z) P_0(z)}{z}\right] - \mu P_{(0,1)} = \theta P_0(z)$$
$$+\left(\lambda z + \frac{\mu}{z}\right)\left[\frac{(\lambda+\theta-\lambda z) P_0(z)}{z}\right] - \frac{\mu}{z} P_{(0,1)}$$

$$\times z \cdot z \Rightarrow \left[(\lambda+z+\mu)(\lambda+\theta-\lambda z) z - \theta z - (\lambda z^2+\mu)(\lambda+\theta-\lambda z)\right] P_0(z)$$
$$= \mu z z P_{(1,1)} - \mu z P_{(0,1)}$$

διαιρώ με $z-1$ $\Rightarrow$ $$P_0(z) = \frac{\mu z P_{(0,1)}}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda+\mu+z+\theta) z + \mu(\lambda+\theta)}$$

Έστω $D(z) = \lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda+\mu+\theta+z)z + \mu(\lambda+\theta)$

$$D(z) = z^2\left[\lambda^2 - \lambda(\lambda+\mu+\theta+z)z^{-1} + \mu(\lambda+\theta)z^{-2}\right]$$

Έστω $\rho_{1,2} = \dfrac{\lambda(\lambda+\mu+\theta+z) \pm \sqrt{\lambda^2(\lambda+\mu+\theta+z)^2 - 4\lambda^2\mu(\lambda+\theta)}}{2\mu(\lambda+\theta)}$

$$D(z) = z^2\mu(\lambda+\theta)(z^{-1}-\rho_1)(z^{-1}-\rho_2)$$
$$D(z) = \mu(\lambda+\theta)(1-z\rho_1)(1-\rho_2 z)$$

Άρα $P_0(z) = \dfrac{c_1}{1-\rho_1 z} + \dfrac{c_2}{1-\rho_2 z}$

$$P_1(z) = \frac{(\lambda+\theta-\lambda z)P_0(z)}{z} = \frac{(\lambda+\theta-\lambda z)}{z}\left(\frac{c_1}{1-\rho_1 z} + \frac{c_2}{1-\rho_2 z}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,0)} z^n = c_1\sum_{n=0}^{\infty}\rho_1^n z^n + c_2\sum_{n=0}^{\infty}\rho_2^n z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{(n,0)} = c_1\rho_1^n + c_2\rho_2^n \quad , n \geq 0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n,1)} z^n = \frac{\lambda+\theta}{z}c_1\sum_{n=0}\rho_1^n z^n + \frac{\lambda+\theta}{z}c_2\sum_{n=0}\rho_2^n z^n$$

$$-\frac{\lambda}{z}c_1\sum_{k=0}^{\infty}\rho_1^k z^{k+1} - \frac{\lambda}{z}c_2\sum_{k=0}^{\infty}\rho_2^k z^{k+1}$$

$$P_{(0,1)} = \frac{\lambda+\theta}{z}(c_1+c_2)$$

$$\boxed{P_{(n,1)} = \frac{\lambda+\theta}{z}\left(c_1 p_1^n + c_2 p_2^n\right) - \frac{\lambda}{z}\left(c_1 p_1^{n-1} + c_2 p_2^{n-1}\right), \quad n \geq 1}$$

Για να βρω τα c_1, c_2, έχω:

$$P_0(1) + P_1(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{c_1}{1-p_1} + \frac{c_2}{1-p_2}\right)\left(1 + \frac{\cancel{\lambda}+\theta-\cancel{\lambda}}{z}\right) = 1$$

και

$$P_0(z) = \frac{c_1}{1-p_1 z} + \frac{c_2}{1-p_2 z} = \frac{c_1(1-p_2 z) + c_2(1-p_1 z)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)}$$

$$P_0(z) = \frac{(c_1+c_2) - (c_1 p_2 - c_2 p_1) z}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \frac{\mu z P_{(0,1)}}{\text{σταθ}(1-p_1 z)(1-p_2 z)}$$

$$\Rightarrow c_1 p_2 + c_2 p_1 = 0$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} \left(\frac{c_1}{1-p_1} + \frac{c_2}{1-p_2}\right)\left(1 + \frac{\theta}{z}\right) = 1 \\ c_1 p_2 + c_2 p_1 = 0 \end{cases}$$

Βρίσκω τα c_1, c_2.