Ουρές Αναμονής 23.11.2022

μάθημα 15

Γενικές Μαρκοβιανές Ουρές
Μέθοδος Πιθανογεννητριών

Ασκήσεις

1) Γενικό πλαίσιο

Γενική Μαρκοβιανή ουρά $\{Q(t)\}$ (# πελατών) ΜΑΣΧ με P_n κατανομή ισορροπίας

Εξισώσεις ισορροπίας για την (P_n):

$$q_n P_n = \sum_{j \neq n} q_{jn} P_j \quad , n \geq 0$$

$\downarrow$ μέθοδος πιθανογεννητριών (εξίσωση n) $\times Z^n$ και άθροιση

Εξίσωση για την $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n$

με τουλάχιστον μία άγνωστη παράμετρο.

- Υπολογισμός άγνωστων παραμέτρων

i) Εξίσωση κανονικοποίησης $P(1) = 1$

ii) Η $P(z)$ αναλύεται τουλάχιστον στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (Θεώρημα Rouché).

- Μορφή εξίσωσης για την $P(z)$
  - οι ρυθμοί για την κατάσταση n είναι „ανεξάρτητοι" του n
    - Αλγεβρική εξίσωση για την $P(z)$ → $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ ρητή
  - υπάρχουν πολλαπλοί ρυθμοί
    - Διαφορική εξίσωση για την $P(z)$ → $P(z) = e^{R(z)}$ εκθετική

- Ανάκτηση των P_n από την $P(z)$ (αντίστροφη πιθανογεννήτριας).
  - Συμβολικά
  - Αριθμητικά

Δύο ιδέες: 1) Ακριβής τύπος για την (P_n) 2) Αναδρομικό σχήμα για την (P_n).

② Υπενθύμιση: Ουραία γεννήτρια

Αν $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k$, $\tilde{g}_j = \dfrac{\sum_{k=j}^{\infty} g_k}{m}$, $j \geq 1$ (m: μέση τιμή της (g_k))

Τότε $\tilde{G}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j z^j = \dfrac{z(1-G(z))}{m(1-z)}$

③ Αντιστροφή ρητών πιθανογεννητριών - Αναδρομικό σχήμα

<u>Βασική ιδέα:</u> $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow P(z)D(z) = N(z)$

και αναπτύξεις σε δυνάμεις του z^n

<u>Παράδειγμα</u> Στην $M^x/M/1$, είχαμε καταλήξει ότι (M/M/1 με ομαδικές αφίξεις)

$$P(z) = \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda m}{\mu}\right)(1-z)}{\mu - (\lambda+\mu)z + \lambda z G(z)}$$

διαιρώ με μ

$\rho = \lambda/\mu$

$$P(z) = \frac{(1-\rho m)(1-z)}{\underbrace{1 - (\rho+1)z}_{1-z-\rho z} + \rho z G(z)} = \frac{1-\rho m}{\frac{1-z}{1-z} - \frac{\rho z(1-G(z))}{1-z}}$$

$$= \frac{1-\rho m}{1 - \rho m \tilde{G}(z)} \Rightarrow P(z)\left(1 - \rho m \tilde{G}(z)\right) = 1 - \rho m.$$

$$\Rightarrow P(z) = 1 - \rho m + \rho m P(z) \tilde{G}(z)$$

Υπενθύμιση: Αν $A(z) = B(z)\,C(z) \Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$

$$p_0 = 1 - \rho m$$

$$p_n = \rho m \sum_{k=0}^{n-1} p_k \tilde{g}_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Scanned with CamScanner

Αντίστροφη εκθετικών πιθανογεννητριών · Αναδρομικό σχήμα

$$P(z) = e^{R(z)}$$

$$\overset{\log}{\Rightarrow} \log(P(z)) = R(z) \overset{d/dz}{\Rightarrow} \frac{P'(z)}{P(z)} = R'(z)$$

$$\Rightarrow P'(z) = R'(z)P(z)$$

Όμως $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \Rightarrow P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^{n-1}$

$$\Rightarrow zP'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n z^n$$

και $zP'(z) = P(z) z R'(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow nP_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k (n-k) r_{n-k}$$

Άρα

$$P_0 = e^{r_0}$$

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_k (n-k) r_{n-k}, \quad n \geq 1$$

<u>Παράδειγμα</u>

Στην $M^X/M/\infty$ ουρά ($M/M/\infty$ με ομαδικές αφίξεις) είχαμε καταλήξει στην

$$P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u}\,du}$$

$$\Rightarrow \log(P(z)) = -\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u}\,du$$

$$\Rightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\lambda}{\mu} \left[\frac{1-G(z)}{1-z} \right] \Rightarrow$$

$$zP'(z) = P(z) \frac{\lambda m}{\mu} \left(\frac{z(1-G(z))}{m(1-z)} \right)$$

$$\Rightarrow zP'(z) = P(z) \frac{\lambda m}{\mu} \tilde{G}(z)$$

$$P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-G(u)}{1-u} du}$$

$$P_n = \frac{\lambda m}{n\mu} \sum_{k=0}^{n-1} P_k \tilde{g}_{n-k} \quad , n \geq 1$$

(5) Ασκήσεις κεφάλαιο 7

(7.2)

M|M|1 με ομαδικές αφίξεις, μεμονωμένες εξυπηρετήσεις
Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων με ρυθμό λ
Μέγεθος ομάδων 2
$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, $k = +\infty$, FCFS
$Q(t) = \#$ πελατών στο σύστημα την στιγμή t

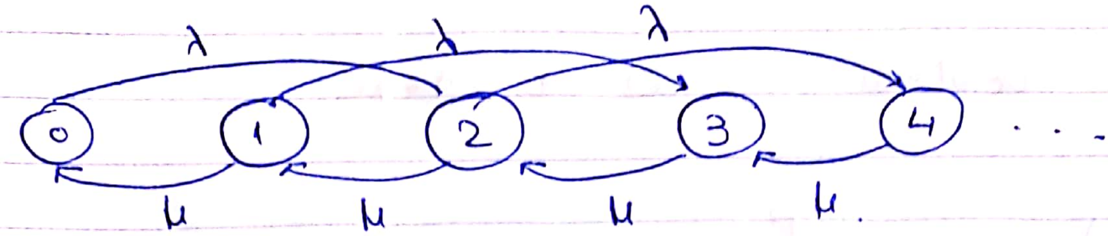
i) Αιτιολόγηση $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ + διάγραμμα
ii) $P(z)$ συναρτήσει των λ, μ, p_0
iii) Συνθήκη ευστάθειας + $p_0 = ?$
iv) Pr [σε στιγμή άφιξης πελάτη να καταλαμβάνει την n-οστή θέση]
v) Για $\lambda = 1$, $\mu = 6$ υπολογίστε την (P_n).

<u>Λύση</u>

i)

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	2	$Exp(\lambda)$
⋮		
$n \geq 1$	$n+2$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

Όλοι οι χρόνοι $Exp \rightarrow \{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



ii) $\lambda P_0 = \mu P_1$ $\quad \times Z^0$

$(\lambda+\mu)P_1 = \mu P_2$ $\quad \times Z^1$

$(\lambda+\mu)P_n = \lambda P_{n-2} + \mu P_{n+1}$ $\quad \times Z^n,\ n \geq 2$

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \lambda \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2} Z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} Z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \lambda Z^2 P(z) + \frac{\mu}{Z} \sum_{k=1}^{\infty} P_k Z^k \Rightarrow$$

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu P_0 = \lambda z^2 P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - P_0).$$

$$\Rightarrow z(\lambda+\mu)P(z) - \mu z P_0 = \lambda z^3 P(z) + \mu(P(z) - P_0)$$

$$\Rightarrow zP(z) + \mu z P(z) - \mu z P_0 = \lambda z^3 P(z) + \mu P(z) - \mu P_0$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu P_0 (z-1)}{(\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu}.$$

iii) $P(1) = 1 \Rightarrow 1 = \dfrac{\mu P_0}{(\lambda+\mu) - 3\lambda} \rightarrow \mu P_0 = \mu - 2\lambda$

$$\rightarrow P_0 = 1 - \frac{2\lambda}{\mu}.$$

Ευστάθεια: $P_0 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda < \mu$.

iv) a_{n-1} = Pr[αφικνούμενος πελάτης καταλαμβάνει n-οστή θέση]
= Pr[η ομάδα βλέπει n-1] Pr[είναι ο πρώτος]
+ Pr[η ομάδα βλέπει n-2 πελάτες] Pr[είναι ο δεύτερος]

PASTA

$$= P_{n-1} \cdot \frac{1}{2} + P_{n-2} \cdot \frac{1}{2}$$

v) Για $\lambda = 1$, $\mu = 6$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{6\left(1 - \frac{1}{3}\right)(z-1)}{7z - z^3 - 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{4(-1+z)}{6(z-1) - z(z-1)(z+1)} = \frac{4}{6 - z - z^2}$$

$$P(z) = \frac{4}{-(z-2)(z+3)} = \frac{4}{(2-z)(z+3)}$$

Scanned with CamScanner

Τελικά $P(z) = \dfrac{4}{(2-z)(3+z)}$

$$P(z) = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z}$$

$$\frac{4}{(2-z)(3+z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \Rightarrow \frac{4}{3+z} = A + \frac{(2-z)B}{3+z}$$

$z=2 \Rightarrow A = \dfrac{4}{5}$

$$\frac{4}{(2-z)(3+z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \Rightarrow \frac{4}{2-z} = \frac{(3+z)A}{2-z} + B$$

$z=-3 \Rightarrow B = \dfrac{4}{5}$

Επομένως $P(z) = \dfrac{4}{5}\left[\dfrac{1}{2-z}\right] + \dfrac{4}{5}\left[\dfrac{1}{3+z}\right]$

$$= \frac{4}{10}\left(\frac{1}{1-z/2}\right) + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{1+z/3}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n z^n$$

Άρα $P_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{4}{15}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n, \; n \geq 0$

⑥ Αντιστροφή ρητών πιθανογεννητριών όπου ο παρονομαστής έχει διπλή ρίζα (πολλαπλή ρίζα)

Χρειαζόμαστε το ανάπτυγμα Taylor της $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = (1-z)^{-1} \xrightarrow[\text{k παραγωγίσεις}]{} \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\dots(j-k+1) z^{j-k} = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$$

Άρα $$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j!}{k!(j-k)!} z^{j-k} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} z^{j-k}$$

$\underline{\underline{n = j-k}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

Πχ $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$