Ουρές Αναμονής 14.11.2022

Μάθημα 13

1. Η $M|M^r|1$ ουρά

Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ

$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

Οι πελάτες εξυπηρετούνται σε ομάδες r πελατών (r σταθ)

Για να ξεκινήσει η εξυπηρέτηση πρέπει να συσσωρευθούν οποιοιδήποτε r πελάτες

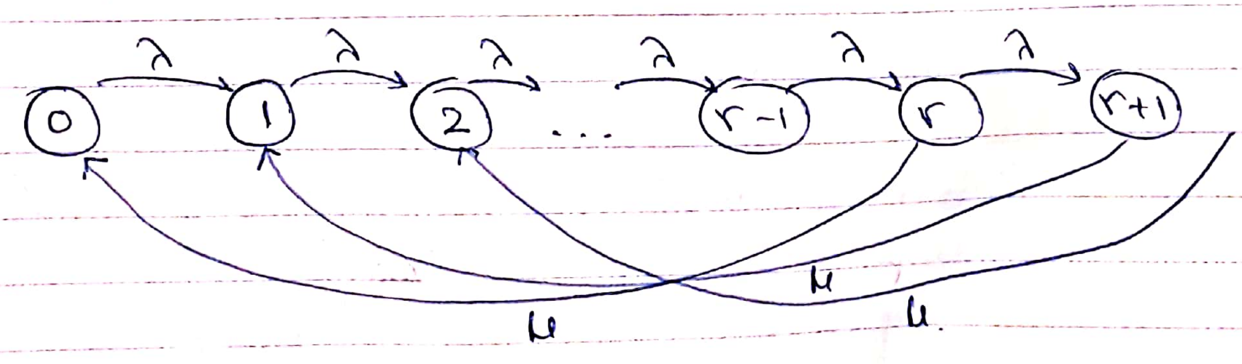
άπειρη χωρητικότητα, FCFS

2. Μοντελοποίηση ως ΜΑΣΧ

$Q(t) = \#$ πελατών

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
$0 \le n \le r-1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
$n \ge r$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-r$	$Exp(\mu)$

Άρα $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



3. Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\lambda P_0 = \mu P_r \quad ①$$

$$\lambda P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+r} \qquad 1 \leq n \leq r-1 \quad ②$$

$$(\lambda+\mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+r} \quad , \; n \geq r \quad ③$$

4. Μέθοδος Πιθανογεννητριών

Παίρνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας και πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση που αναφέρεται στην κατάσταση n με Z^n και αθροίζουμε

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n Z^n \quad , \; |z| \leq 1$$

$$① \cdot Z^0 + \sum_{n=1}^{r-1} ② \cdot Z^n + \sum_{n=r}^{\infty} ③ \cdot Z^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda P(Z) + \mu \left[P(Z) - \sum_{n=0}^{r-1} P_n Z^n \right] = \mu \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+r} Z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^n$$

$$= \frac{\mu}{Z^r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+r} Z^{n+r} + \lambda z \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} Z^{n-1} \quad \overset{k=n+r}{\underset{i=n-1}{=\!=}}$$

$$= \frac{\mu}{Z^r} \sum_{k=r}^{\infty} P_k Z^k + \lambda z \sum_{i=0}^{\infty} P_i Z^i$$

Καταλήξαμε σε:

$$(\lambda+\mu) P(Z) - \mu \sum_{n=0}^{r-1} P_n Z^n = \frac{\mu}{Z^r} \left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1} P_n Z^n \right) + \lambda z P(z)$$

$\begin{pmatrix}\text{πολλαπλασιάζω} \\ \text{με } Z^r\end{pmatrix} \Rightarrow \left[(\lambda+\mu) Z^r - \mu - \lambda Z^{r+1} \right] P(Z) =$

$$= \mu \sum_{n=0}^{r-1} P_n Z^n (Z^r - 1)$$

$$\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right) \Rightarrow \left[(\rho+1)z^r - 1 - \rho z^{r+1}\right] P(z) = \sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n (z^r - 1)$$

διαιρώ με το

$$P(z) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n\right)(z^r - 1)}{(\rho+1)z^r - 1 - \rho z^{r+1}}$$

Για τον προσδιορισμό της $P(z)$ χρειαζόμαστε αναλογική των $P_0, \dots P_{r-1}$

ΙΔΕΑ

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

5. Πόρισμα του θεωρήματος Rouché για # ριζών εξίσωσης στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

Επειδή συγκλίνει στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ κάθε ρίζα του $D(z)$ στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ είναι και ρίζα του $N(z)$

Έστω ότι $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $n = 0, 1, 2, \dots$ και

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n = +\infty$$

Έστω επίσης $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (η γεννήτριά της), $|z| \leq 1$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Ορίζω $A(z) = z^N - a(z)$

Ορίζουμε $k = \text{ΜΚΔ}\{j - N : j \text{ με } a_j \neq 0\}$

Τότε ισχύει για το πλήθος ριζών της $A(z)$:

Συνθήκη	# ριζών στο $\{\lvert z\rvert < 1\}$	# ριζών στο $\{\lvert z\rvert = 1\}$	# ριζών στο $\{\lvert z\rvert \leq 1\}$
$a(1) < 1$	N	0	N
$a(1) = 1, A'(1) > 0$	$N - k$	k απλές (τις όσες k-ρίζες του 1)	N
$a(1) = 1, A'(1) = 0$	$N - k$	k διπλές (τις όσες k-ρίζες του 1)	$N + k$
$a(1) = 1, A'(1) < 0$	N	k απλές (τις όσες k-ρίζες του 1)	$N + k$

6. Εφαρμογή του θεωρήματος Rouché για τον προσδιορισμό των άγνωστων ποσοστιαίων

$$D(z) = (\rho+1)z^r - 1 - \rho z^{r+1}$$
$$= (\rho+1)\left(z^r - \frac{1}{\rho+1} - \frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1} \right)$$

Άρα θέτω $a_0 = \frac{1}{1+\rho}$, $a_{r+1} = \frac{\rho}{1+\rho}$, $a_j = 0$, $j \neq 0, r+1$
και $N = r$

Τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = 0 \cdot \frac{1}{1+\rho} + (r+1)\frac{\rho}{1+\rho} < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n = 0 \cdot \frac{1}{1+\rho} + (r+1)^2 \frac{\rho}{1+\rho} < +\infty$$

Εδώ $k = \text{ΜΚΔ}(0-r, r+1-r) = 1$

$$a(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$$

Περίπτωση 1: $A'(z) > 0$

$$A'(z) > 0 \Leftrightarrow r - \frac{\rho(r+1)}{1+\rho} > 0 \Leftrightarrow$$

$$r(1+\rho) - \rho(r+1) > 0 \Leftrightarrow r - \rho > 0 \Leftrightarrow r > \rho \quad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$\Leftrightarrow \mu r > \lambda$ $\quad \lambda$: ρυθμός αφίξεων

μr: ρυθμός αναχωρήσεων ανά χρονική μονάδα όταν το σύστημα εξυπηρετεί

Σε αυτή την περίπτωση, ο παρονομαστής $D(z)$ έχει $r-1$ ($N=r$, $k=1$) ρίζες στον $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και 1 ρίζα στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (την μονάδα)

Άρα οι ρίζες του $D(z)$ είναι $\underset{\text{μέτρο} > 1}{z_0}, \underbrace{z_1, \dots z_{r-1}}_{\text{μέτρο} < 1}, \underset{1}{z_r}$

$$D(z) = -\rho(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_r)$$

Οι $z_1, \dots z_r$ πρέπει να είναι και ρίζες του $N(z)$

$$N(z) = (z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n$$

Άρα οι $z_1, \dots z_{r-1}$ είναι ρίζες του $\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n$

Επομένως $\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n = \text{σταθερά} \cdot (z-z_1)\dots(z-z_{r-1})$

Άρα $$P(z) = \frac{(z^r-1)\,\text{σταθερά} \cdot \cancel{(z-z_1)\dots(z-z_{r-1})}}{\text{σταθερά}'\,(z-z_0)\cancel{\dots(z-z_{r-1})}(z-\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{z_r})}$$

$$\Rightarrow P(z) = \left(\frac{z^r-1}{z-1}\right)\left(\frac{c}{z-z_0}\right)$$

Πώς βρίσκω το c;
Με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$P(1)=1 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1} z^k \Big|_{z=1}}_{= r} \cdot \frac{c}{1-z_0} \Rightarrow$$

$$c = \frac{1-z_0}{r}$$

Τελικά $P(z) = \frac{z^r-1}{z-1} \cdot \frac{1-z_0}{z-z_0} = \left(\frac{z^r-1}{z-1}\right)\underbrace{\left(\frac{1-\frac{1}{z_0}}{1-\frac{z}{z_0}}\right)}_{\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n}$

$$\sum_{n=0}^{r-1} \frac{z^n}{r}$$

↓

discrUnif

πιθανογεννήτρια Geom

Η $P(z)$ γράφεται ως γινόμενο πιθανογεννητριών μιας Geom$\left(\frac{1}{z_0}\right)$ με σπ. $a_n = \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n, n \geq 0$
και μιας discrUnif στο $\{0, \dots r-1\}$
με σπ $b_n = \frac{1}{r}, n=0, \dots r-1$

$$P(z) = A(z)B(z) \quad P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}, \quad n=0,1,\dots$$

$$P_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\min(n,r-1)} \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n-k}$$

Με z_0 η μοναδική ρίζα του $(p+1)z^r - 1 - pz^r$ με $|z_0| > 1$ (βρίσκεται με αριθμητικές μεθόδους)

Άρα αν $r\mu > \lambda$, έχουμε ευστάθεια και η κατανομή ισορροπίας είναι η P_n

Περίπτωση 2: $A'(1) = 0$

$A'(1) = 0 \Leftrightarrow (p+1)r - (r+1)p = 0$
$\Leftrightarrow p = r \Leftrightarrow \mu r = \lambda$

Εδώ το θεώρημα Rouché λέει:
$D(z) = (p+1)z^r - 1 - pz^{r+1}$ έχει $r-1$ ρίζες στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και διπλή ρίζα την μονάδα.
Επομένως, το $\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n$ έχει r ρίζες (και είναι βαθμού $r-1$). Άρα είναι ταυτοτικά 0
$P(z) = 0 \Rightarrow$ αστάθεια

Περίπτωση 3: $A'(1) < 0$

$A'(1) < 0 \Leftrightarrow \mu r < \lambda$
Από το θεώρημα Rouché, $D(z)$ έχει r ρίζες στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και απλή ρίζα το 1

Το $\sum_{n=0}^{r-1} P_n z^n$ έχει r ρίζες $\rightarrow$ Ταυτοτικά 0

$P(z) = 0 \Rightarrow$ αστάθεια