Ουρές Αναμονής 02.11.2022

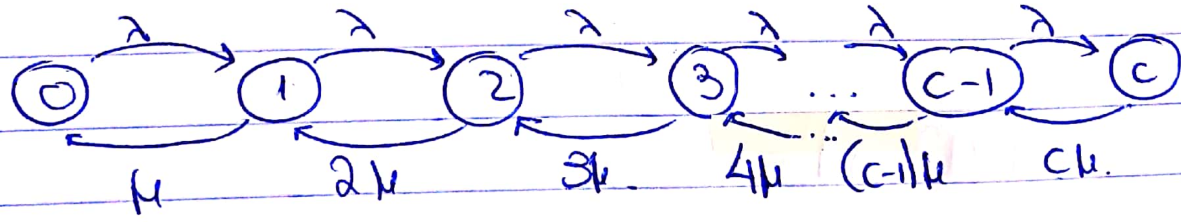
Μάθημα 11

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

1. Η M/M/c/c ουρά
(Μοντέλο απωλειών του Erlang)

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
c υπηρέτες, $K = c$
(καθόλου χώρος αναμονής)

$Q(t)$ ΜΑΣΧ γεννήσεων-θανάτων



- $B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{c} \frac{\lambda^j}{j!\,\mu^j} \underset{\rho=\lambda/\mu}{=} \sum_{j=0}^{c} \frac{\rho^j}{j!} < +\infty$

Πάντα ευσταθές

$$P_j = \frac{\frac{\rho^j}{j!}}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!}}, \quad 0 \le j \le c$$

Λόγω PASTA κ' μεμονωμένων μεταβάσεων

$$d_j = a_j = P_j$$

- Ποσοστό χαμένων πελατών.

$$\begin{pmatrix}\text{Ποσοστό}\\ \text{χαμένων}\\ \text{πελατών}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Πιθανότητα}\\ \text{να χαθεί}\\ \text{πελάτης}\end{pmatrix} = a_c \underset{\text{PASTA}}{=} P_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!}}$$

Τύπος απωλειών του Erlang (Erlang-B formula).

- Ρυθμός διαπέρασης

$$\mu^* = \lambda^* = \sum_{n=0}^{c} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{c-1} \lambda P_n = \lambda(1-P_c)$$

! Ο τύπος Erlang B και η κατανομή ισορροπίας ισχύουν και για το γενικότερο M/G/c/c σύστημα με $\rho = \lambda b$, b μέσος χρόνος εξυπηρέτησης. Ιδιότητα μη ευαισθησίας.

Scanned with CamScanner

2. Μοντέλο Engset

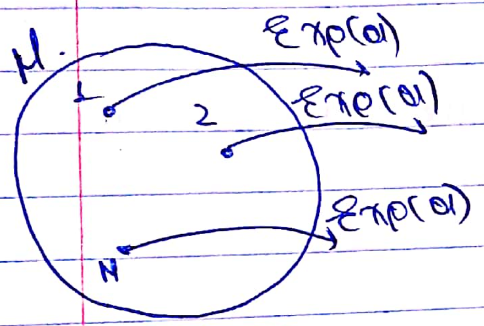
Η $M/M/c/c$ είναι αξιόπιστο μοντέλο (όσον αφορά τις αφίξεις) αν υπάρχει μεγάλος αριθμός δυνητικών πελατών και κάθε πελάτης γεννά απαιτήσεις εξυπηρέτησης αραιά.

Στο μοντέλο του Engset έχουμε

→ Αντί Poisson διαδικασία αφίξεων, κάθε δυνητικός πελάτης (από έναν πληθυσμό μεγέθους M) γεννά απαιτήσεις (αφίξεις) για εξυπηρέτηση με ρυθμό a (διαδικασία Poisson) όταν δεν εξυπηρετείται

→ $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

→ c υπηρέτες, χωρητικότητα c



$1 \sim Exp(\mu)$

$2 \sim Exp(\mu)$

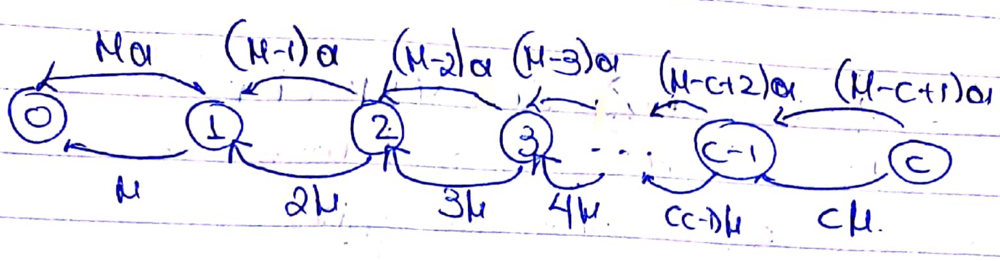
$\vdots$

$c \sim Exp(\mu)$

$Q(t) = \#$ πλήθος πελατών σε διαδικασία εξυπηρέτησης

	κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
	0	1	$Exp(Ma)$
$1 \le n \le c-1$	n	$n+1$	$Exp((M-n)a)$
		$n-1$	$Exp(n\mu)$
	$\vdots$	$\vdots$	
	c	$c-1$	$Exp(c\mu)$

Άρα $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ



$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{c} \frac{M(M-1)\dots(M-j+1)}{j!}\left(\frac{a}{\mu}\right)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{c} \binom{M}{j}\left(\frac{a}{\mu}\right)^j = \frac{(a+\mu)^M}{\mu^M} \sum_{j=0}^{c} \binom{M}{j} \rho^j (1-\rho)^{M-j} < +\infty$$

$$\rho = \frac{a}{a+\mu}$$

Πάντα ευσταθές σύστημα

$$P_j = \frac{\binom{M}{j} \rho^j (1-\rho)^{M-j}}{\sum_{n=0}^{c} \binom{M}{n} \rho^n (1-\rho)^{M-n}}, \quad 0 \le j \le c$$

Περικεκομμένη Διωνυμική TruncBin(M, ρ, c).

- Ρυθμός διεκπεραίωσης του συστήματος

$$\mu^* = \sum_{j=1}^{c} \mu_j P_j = B \sum_{j=1}^{c} j\mu \binom{M}{j} \rho^j (1-\rho)^{M-j}$$

$$\binom{M}{j} = \frac{M}{j}\binom{M-1}{j-1}$$

$$= B\mu M \sum_{j=1}^{c} \binom{M-1}{j-1} \rho^j (1-\rho)^{M-j}$$

$$\underset{j-1=k}{=} B\mu M\rho \sum_{k=0}^{c-1} \binom{M-1}{k} \rho^k (1-\rho)^{M-1-k}$$

$$= M\mu\rho \frac{\sum_{k=0}^{c-1} \binom{M-1}{k} \rho^k (1-\rho)^{M-1-k}}{\sum_{n=0}^{c} \binom{M}{n} \rho^n (1-\rho)^{M-n}}$$

- a_n = πιθανότητα σε στιγμή γέννησης απαίτησης εξυπηρέτησης να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα

$$a_n = \frac{\lambda_n P_n}{\lambda^*} = \frac{P_n (M-n)\cancel{\alpha}}{\sum_{j=0}^{c-1} P_j (M-j)\cancel{\alpha}} = \frac{\binom{M}{n} \rho^n (1-\rho)^{M-n} (M-n)}{\sum_{j=0}^{c-1} \binom{M}{j} \rho^j (1-\rho)^{M-j} (M-j)}$$

$$\binom{M}{j} = \binom{M}{M-j}$$

$$= \frac{\frac{M}{M-n}\binom{M-1}{M-n-1} \rho^n (1-\rho)^{M-n} (M-n)}{\sum_{j=0}^{c-1} \frac{M}{M-j} \rho^j (1-\rho)^{M-j} \binom{M-1}{M-j-1} (M-j)}$$

Άρα

$$a_n = \frac{\binom{M-1}{n} \rho^n (1-\rho)^{M-n-1}}{\sum_{j=0}^{c-1} \binom{M-1}{j} \rho^j (1-\rho)^{M-1-j}}, \quad 0 \leq n \leq c-1$$

- Ποσοστό χαμένων απαιτήσεων εξυπηρέτησης

$$\begin{pmatrix} \text{ποσοστό χαμένων} \\ \text{απαιτήσεων εξυπηρέτησης} \end{pmatrix} = \frac{(M-c)\,a \cdot P_c}{\sum_{n=0}^{c} (M-n)\,a\,P_n}$$

ρυθμός χαμένων απαιτήσεων

ρυθμός γεννήσεων εξυπηρετήσεων

3. Ασκήσεις Κεφάλαιο 6

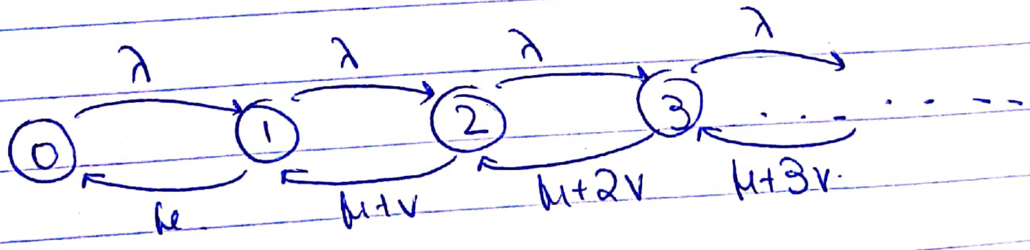
6.1. $M/M/1$ (με λ και μ) — $Exp(\nu)$ χρόνοι υπομονής για τους πελάτες που δεν εξυπηρετούνται.

a) Αιτιολογήστε γιατί $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ

β) $(P_j) = ?$ όταν $\nu = \mu$.

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$\vdots$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n-1$	$Exp(\mu+(n-1)\nu)$

Άρα $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



Για $\mu = \nu$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "4\mu"]
\end{tikzcd}$$

$$B^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = e^{\rho} < +\infty \quad \text{Πάντα ευσταθές}$$

$$P_j = e^{-\rho} \cdot \frac{\rho^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots \quad P_j \sim \text{Poisson}(\rho).$$