Ουρές Αναμονής 24.10.2022
Μάθημα 8

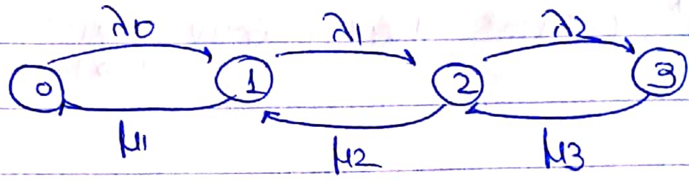
Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

1. Ορισμός:

Απλή μαρκοβιανή ουρά $\Leftrightarrow$ $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ τ/π γέννησης-θανάτου.

2. Βοηθοί υπολογισμοί.

$\{Q(t)\}$



λ_i: ρυθμός αφίξεων όταν $Q(t)=i$

$$= \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[A(t,t+h)=1 \mid Q(t)=i]}{h} =$$

όπου $A(t,t+h) = \#$ αφίξεων στο $(t,t+h]$.

$$= \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{E[A(t,t+h) \mid Q(t)=i]}{h}$$

μ_i: ρυθμός εξυπηρέτησης όταν $Q(t)=i$

$$\mu_i = \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[D(t,t+h)=1 \mid Q(t)=i]}{h}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{E[D(t,t+h) \mid Q(t)=i]}{h}$$

$D(t,t+h) = \#$ αναχωρήσεων στο $(t,t+h]$

Θέλουμε τις: $P_j = Pr[Q = j]$.
(κατανομή ισορροπίας # πελατών σε συνεχή χρόνο)

- $a_j = Pr[Q^- = j]$
(κατανομή ισορροπίας # πελατών σε στιγμές αφίξεων)
- $d_j = Pr[Q^+ = j]$
(κατανομή ισορροπίας # πελατών σε στιγμές αναχωρήσεων)

- $\lambda^* =$ ρυθμός αφίξεων $= \lim_{t \to +\infty} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{E[A(t, t+h)]}{h}$

- $\mu^* =$ ρυθμός αναχωρήσεων $= \lim_{t \to +\infty} \lim_{h \to 0^+} \dfrac{E[D(t, t+h)]}{h}$

- P_j

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j} = \begin{cases} < +\infty, & \text{ευστάθεια} \\ +\infty, & \text{αστάθεια} \end{cases}$$

Αν $B^{-1} < +\infty$, τότε $P_j = \begin{cases} B, & j = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j}, & j \geq 1 \end{cases}$

- λ^*

$$\lim_{t \to +\infty} \lim_{h \to 0^+} \frac{E[A(t, t+h)]}{h}.$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \lim_{h \to 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q(t) = j] \, E[A(t, t+h) \mid Q(t) = j]}{h}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P_j \lambda_j$$

- μ^*

Όμοια με πριν, $\mu^* = \sum_{j=1}^{\infty} P_j \mu_j$

- a_j

$$a_j = Pr[Q^- = j] = \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} Pr[Q(t) = j \mid A(t, t+h) = 1].$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[Q(t) = j] Pr[A(t,t+h) = 1 \mid Q(t) = j]/h}{Pr[A(t,t+h) = 1]/h}$$

$$= \frac{P_j \cdot \lambda_j}{\lambda^*}.$$

- d_j

Ομοίως $d_j = \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to 0^+} \overbrace{Pr[Q(t+h) = j \mid D(t, t+h) = 1]}^{Pr[Q(t) = j+1 \mid D(t, t+h) = 1]}$

$$= \frac{P_{j+1} \mu_{j+1}}{\mu^*}.$$

3. Πορίσματα

- $\lambda^* = \mu^*$

$$\lambda^* = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \lambda_j = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{P_{j+1}\mu_{j+1}}_{=\mu^*}$$ (από τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας)

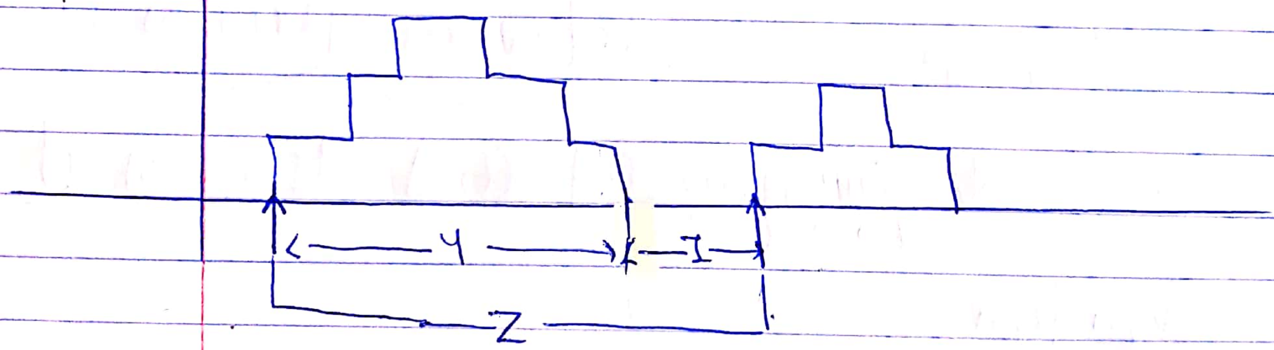
- Εδώ έχουμε μεμονωμένες μεταβάσεις, άρα

$$a_j = \frac{\lambda_j P_j}{\lambda^*} = \frac{\mu_{j+1} P_{j+1}}{\mu^*} = d_j$$

- Αν έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων (PASTA)

$$\lambda_j = \lambda \ \forall j \Rightarrow a_j = P_j$$

4. Υπολογισμοί κύκλου απασχόλησης



Y: περίοδος συνεχούς λειτουργίας $E[Y] = E[Z] - E[I]$

I: περίοδος αργίας $I \sim \exp(\lambda_0) \Rightarrow E[I] = 1/\lambda_0$

Z: κύκλος απασχόλησης $P_0 = \dfrac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \dfrac{E[I]}{P_0}$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda_0 P_0}$$

5. Κατανομή χρόνου παραμονής πελάτη υπό την FCFS

$$F_S(x) = Pr[S\le x] = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^-=j]}_{= a_j} \, Pr[S\le x \mid Q^-=j]$$

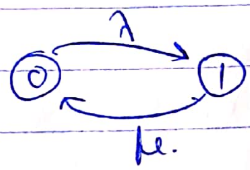
6. M|M|1|1 ουρά

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων

Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης

1 server, $k=1$

$\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ.



$B^{-1} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda+\mu}{\mu} < +\infty$ πάντα ευσταθές

$P_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$ $\quad P_1 = B\frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$

(διαιρώντας με μ: $P_0 = \frac{1}{1+\rho}$, $P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ → ρυθμός συνωστισμού)

Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ

Ο ρυθμός διαπέρασης (πραγματικών αφίξεων) $= \lambda^* = \lambda P_0$

$= \frac{\lambda}{1+\rho}$.

a_j = Πιθανότητα αφικνούμενος πελάτης βλέπει j

$$a_0 = P_0 = 1/1+\rho$$
$$a_1 = P_1 = \rho/1+\rho$$

a_j^{enter} = Πιθανότητα ο εισερχόμενος πελάτης βλέπει j

$$a_1^{enter} = 0$$

$$a_0^{enter} = 1$$

$$E[T] = \frac{1}{\lambda} \qquad p_0 = \frac{E[T]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda p_0} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\mu}$$

$$F_S(x) = Pr[S \leq x] =$$

$$Pr[Q^- = 0]\, Pr[S \leq x \mid Q^- = 0] + Pr[Q^- = 1]\, Pr[S \leq x \mid Q^- = 1]$$

$$= a_0 (1 - e^{-\mu x}) + a_1 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{1+\rho}(1 - e^{-\mu x}) + \frac{\rho}{1+\rho} = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\mu x}$$

7. Η M/M/1 ουρά

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, $k=+\infty$, FCFS

[PASTA + Μέσων Μεταβ.]

Ευστάθεια $\Leftrightarrow$ $\rho<c \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu}<1 \Leftrightarrow \lambda<\mu$

$$B^{-1}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\ldots\mu_j}=1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

Q(t) ΜΑΣΧ τύπου γέννησης-θανάτου

γεωμετρική σειρά

$$\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j=\begin{cases}+\infty, & \rho\geq 1 \text{ (αστάθεια)}\\ \frac{1}{1-\rho}<+\infty, & \rho<1 \text{ (ευστάθεια)}\end{cases}$$

$$p_j=(1-\rho)\rho^j,\ j\geq 0$$

$$a_j=d_j=p_j$$

$$\lambda^*=\lambda_\infty$$

$$\mu^*=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\mu_j=\sum_{j=1}p_j\mu=\mu(1-p_0)=\lambda$$

$$F_S(x)=\Pr[S\leq x]=\sum_{j=0}^{\infty}\Pr[Q^-=j]\Pr[S\leq x \mid Q^-=j]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^j\int_0^x\frac{\mu^{j+1}}{j!}u^je^{-\mu u}\,du$$

$\int_0^x\frac{\mu^{j+1}}{j!}u^je^{-\mu u}\,du = F_X(x)$, $X\sim$ Erlang$(j+1,\mu)$

(*) άθροισμα ανεξάρτητων $j+1$ Exp(μ)

$$= \int_0^x \mu(1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu u)^j}{j!} e^{-\mu u} \, du =$$

$$= \int_0^x \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)u} \, du.$$

$$\Rightarrow S' \sim Exp(\mu(1-\rho)) = Exp(\mu-\lambda)$$

Κύκλος απασχόλησης

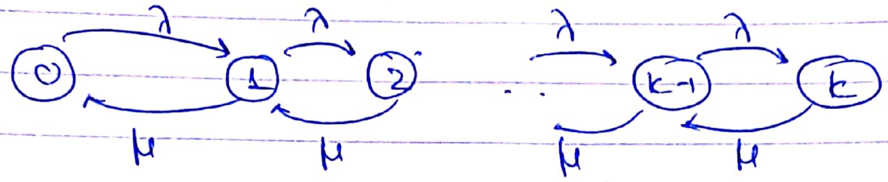
$$E[I] = \frac{1}{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-\rho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I]$$

8 Η M|M|1|k ουρά

(πεπερασμένη χωρητικότητα k)



$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \ldots \mu_j} = \sum_{j=0}^{k} \rho^j = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}, & \rho \neq 1 \\ k+1, & \rho = 1 \end{cases}$$

ΠΑΝΤΑ ΕΥΣΤΑΘΗΣ

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, & j=0,1,\ldots k \quad \rho \neq 1 \ \text{(περικεκομμένη γεωμετρική)} \\ \dfrac{1}{k+1}, & j=0,1,\ldots k, \quad \rho = 1 \ \text{(διακριτή ομοιόμορφη)} \end{cases}$$

$$\lambda^{enter} = \lambda^* = \sum_{j=0}^{k-1} P_j \lambda_j = \lambda(1-P_k)$$

(αφικνούμενοι)

$$d_j = a_j \underset{\uparrow \text{PASTA}}{=} P_j$$

(εισερχόμενοι)

$$d_j^{enter} = a_j^{enter} = \frac{\lambda_j P_j}{\lambda^*}$$

(εισερχόμενοι)

$$a_j^{enter} = \begin{cases} \dfrac{P_j}{1-P_k}, & j=0,\ldots k-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$