# Ουρές Αναμονής 19.10.2022

μάθημα 7

## Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

### Οριακή Θεωρία

1) Υπενθυμίσεις

$\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$ (αριθμήσιμος) και πίνακα ρυθμών $Q = (q_{ij})$

$(q_i = -q_{ii})$. $\quad q_i = \sum_{i \neq j} q_{ij}$

ορσ. 1

$\Longleftrightarrow$ Μαρκοβιανή ιδιότητα

$$Pr[X(t+h)=j \mid X(u)=0,\ 0 \le u < t,\ X(t)=i] =$$
$$Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i] = p_{ij}(h)$$

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} h q_{ij} + o(h), & i \neq j \\ 1 - q_i h + o(h), & i = j \end{cases} \quad h \to 0^+$$

ορσ 2

$\Longleftrightarrow$ Ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i$ είναι $Exp(q_i)$

Πιθανότητα [επόμενη κατάσταση $j$ | παρούσα κατάσταση $i$] $= \dfrac{q_{ij}}{q_i}$

ορσ. 3

$\Longleftrightarrow$ Σε κάθε κατάσταση $i$ τρέχουν ανεξάρτητοι εκθετικοί χρόνοι $T_{ik} \sim Exp(q_{ik})$, $k \neq i$

Η επόμενη μετάβαση θα γίνει σε χρόνο $\min_{k \neq i} T_{ik}$ και προς την κατάσταση $j$, $T_{ij} = \min_{k \neq i} T_{ik}$

$\underline{P}(t) = (P_j(t),\ j \in X)$

$Pr[X(t)=j]$

$\mathbb{P}(t) = (P_{ij}(t),\ i,j \in X)$

περιέχει τις πιθανότητες

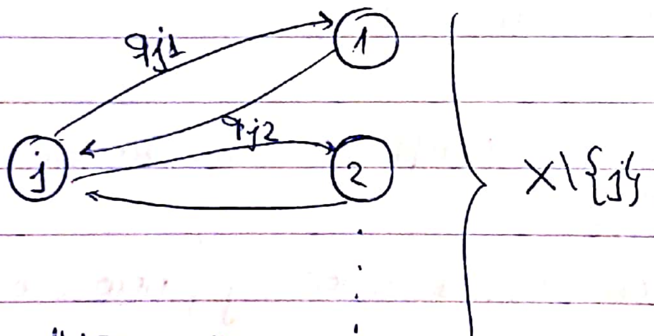
$Pr[X(t)=j \mid X(0)=i]$

Είδαμε ότι ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

$$P'_{ij}(t) = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) \quad ,\ i,j\in X$$

Αν για $t \to +\infty$ $P_{ij}(t)$ σταθεροποιούνται, και δεν εξαρτώνται από το $i$, (δηλαδή $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} P_{ij}(t) = P_j$ )

$$0 = -P_j q_j + \sum_{k\neq j} P_{ik} q_{kj} \Leftrightarrow P_j q_j = \sum_{k\neq j} P_k q_{kj},\ j\in X$$




"ισορροπία"

## 2) Αδιαχώριστη ΜΑΣΧ.

$\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ.

Η $\{X(t)\}$ λέγεται αδιαχώριστη αν $\forall\ i,j \in \mathcal{X}$
$\exists\ i_1, \dots i_m$ με $q_{i i_1}, \dots q_{i i_m} > 0$

## 3) Εργοδικό θεώρημα ΜΑΣΧ.

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ, αδιαχώριστη με χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$, πίνακα ρυθμών $Q = (q_{ij})$.

$$q_i = \sum_{i \neq j} q_{ij} \quad \forall\ i \in \mathcal{X}$$

Αν το σύστημα $P_j q_j = \sum_{i \neq j} P_i q_{ij}$, $j \in \mathcal{X}$

των εξισώσεων (πλήρους) ισορροπίας μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in X} P_j = 1$$

έχει μη αρνητική λύση, τότε

i) Η λύση είναι μοναδική, έστω $\underline{P}$

ii) Κάθε λύση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας, έστω $\underline{x} = (x_j,\ j \in \mathcal{X})$ είναι πολλαπλάσιο της $\underline{P}$ ($\underline{x} = c\underline{P}$, $c \in \mathbb{R}$)

iii) $$\lim_{t \to \infty} \underbrace{\frac{\int_0^t \mathbb{1}\{X(u) = j\}\, du}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η } \{X(t)\} \text{ περνάει στην κατάσταση } j} = P_j \text{ με πιθανότητα } 1$$

iv) $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}} du\right]}{t} = P_j$

v) $\lim_{t \to +\infty} \boxed{\dfrac{\int_0^t Pr[X(u)=j]du}{t}} = Pr[X(U_t)=j] = P_j$ $\quad U_t \sim Unif([0,t])$, $U_t$ ανεξάρτητη της $\{X(t)\}$

vi) $\lim_{t \to +\infty} Pr[X(t)=j] = P_j$

vii) Αν $\underline{P}(0)=\underline{P}$, τότε $\underline{P}(t)=\underline{P}$, $\forall t \geq 0$

Η $\underline{P}$ λέγεται στάσιμη κατανομή, οριακή κατανομή, κατανομή ισορροπίας.

Σε μορφή πινάκων, $\underline{P}$ λύνει το σύστημα:

$\underline{P}^T Q = \underline{0}^T$ και η εξίσωση κανονικοποίησης

είναι $\underline{P}^T \underline{e} = 1$

$\underline{e}$: διάνυσμα με όλα τα στοιχεία 1

$\underline{P}$ ιδιοδιάνυσμα του $Q$ αντίστοιχο στην ιδιοτιμή $0$

Scanned with CamScanner

## 4) Ερμηνείες ποσοτήτων

- $p_j$ : Μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου στην $j$
- $q_{ij}$ : Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων προς την $j$ ανά χρονική μονάδα παραμονής στην $i$.

$$p_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{\text{χρόνος της } \{X(t)\} \text{ στην } j \text{ στο } [0,t]}{t}$$

$$q_{ij} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\#\text{ μεταβάσεων } i \to j \text{ στο } [0,t]}{\text{χρόνος στην } i \text{ στο } [0,t]}$$

$$p_i q_{ij} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\#\text{ μεταβάσεων από } i \text{ σε } j \text{ στο } [0,t]}{t}.$$

- $p_i q_{ij}$ : Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων $i \to j$

Η εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση $j \in \mathcal{X}$ :

$$\underbrace{p_j q_{j}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός εξόδου από την } j} = \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός εισόδου στην } j.}$$

$$q_j = \sum_{i \neq j} q_{ji}$$

5) Ρυθμός κόστους σε ΜΑΣΧ

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ αδιαχώριστη, με πίνακα $Q$ και κατανομή ισορροπίας $P$.
Έστω επίσης $c(i)$ το κόστος παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση $i$ ανά χρονική μονάδα.
$d(i,j)$: κόστος μετάβασης $i \to j$ της $\{X(t)\}$
Μας ενδιαφέρει ο μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$= \sum_{i \in \mathcal{X}} P_i c(i) \left( = \text{μέση τιμή της } c(X) \text{, που η } X \text{ ακολουθεί την κατανομή ισορροπίας} \right)$$

$$+ \sum_{i} \sum_{i \neq j} P_i q_{ij} d(i,j).$$

$$\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους} = \sum_{i \in X} P_i c(i) + \sum_{i} \sum_{i \neq j} P_i q_{ij} d(i,j)$$

6) Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

Η κατανομή ισορροπίας ικανοποιεί για κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ τις εξής εξισώσεις

$$\left( \begin{array}{l} \text{μακροπρόθεσμος} \\ \text{ρυθμός εξόδου} \\ \text{από το } A \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{μακροπρόθεσμος} \\ \text{ρυθμός εισόδου} \\ \text{στο } A \end{array} \right)$$

$$\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c} p_j q_{ji} = \sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} p_i q_{ij}$$

Για $A=\{j\}$ $\quad p_j \sum_{i\neq j} q_{ji} = \sum_{i\neq j} p_i q_{ij}$ (εξισώσεις πλήρους ισορροπίας)

## 7) Κατανομή ισορροπίας ΜΑΣΧ τύπου γέννησης-θανάτου

$\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ λέμε ότι είναι τύπου γέννησης-θανάτου
Αν $\mathcal{X}=\{0,1,2\dots\}$

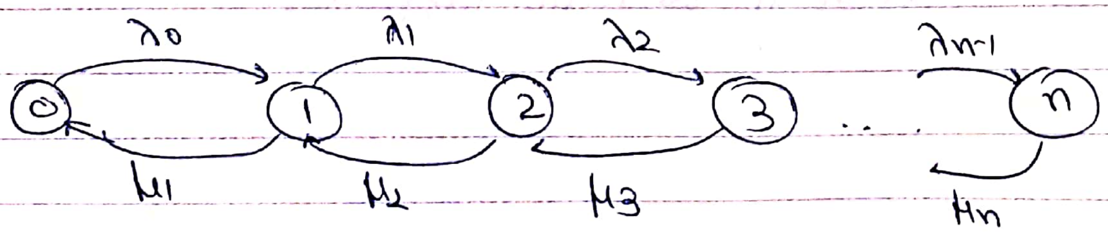
$$q_{ij}=\begin{cases}\lambda_i &, j=i+1\\ \mu_i &, j=i-1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Οι εξισώσεις πλήρους ισορροπίας είναι:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \qquad (j=0)$$
$$(\lambda_1+\mu_1)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \qquad (j=1)$$
$$(\lambda_2+\mu_2)p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 \qquad (j=2)$$

Οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \qquad (A=\{0\})$$
$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 \qquad (A=\{0,1\})$$
$$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3 \qquad (A=\{0,1,2\})$$



$$P_1 = \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_1}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1 P_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0 P_0}{\mu_1}$$

$$P_n = P_0 \left( \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \right), n \geq 1$$

Για την $P_0$ : $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$

$$\Rightarrow P_0 \underbrace{\left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j} + 1 \right)}_{B^{-1}} = 1$$

- Αν $B^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j} + 1 < +\infty$ έχω ευστάθεια, δηλ. υπάρχει η κατανομή ισορροπίας

$$P_j = \begin{cases} B & , j=0 \\ B\left(\frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j}\right) & , j \geq 1 \end{cases}$$

- Αν $B^{-1} = +\infty$ έχω αστάθεια, δηλαδή δεν υπάρχει η κατανομή ισορροπίας