Ουρές Αναμονής

17.10.2022
μάθημα 6

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου (Μ.Α.Σ.Χ.)

1. Ορισμός:
$\{X(t)\}$ στοχαστική διαδικασία
είναι ΜΑΣΧ αν
i) Ο χώρος καταστάσεων (χ.κ) $\mathcal{X}$, είναι αριθμήσιμος.
ii) $Pr[\underbrace{X(t+s)=j}_{\text{μέλλον}} \mid \underbrace{X(u)\ 0\le u<t}_{\text{παρελθόν}}, \underbrace{X(t)=i}_{\text{παρόν}}] =$

$= Pr[X(t+s)=j \mid X(t)=i]$ (μαρκοβιανή ιδιότητα)
$s,t \geq 0 \quad \forall\, i,j \in \mathcal{X}$.

2. Βασικά στοιχεία που προσδιορίζουν μια ΜΑΣΧ.

Αν $\underbrace{Pr[X(t+s)=j \mid X(t)=i]}_{P_{ij}(s)}$ ανεξάρτητες του t

τότε $\{X(t)\}$ λέγεται ομογενής ΜΑΣΧ.
Από εδώ και πέρα, όταν μιλάμε για ΜΑΣΧ, εννοούμε ομογενή.

Μια ΜΑΣΧ χαρακτηρίζεται από
→ $\underline{P}(0) = (P_j(0) : j\in\mathcal{X})$
με $P_j(0) = Pr[X(0)=j]$, $j\in\mathcal{X}$ } αρχική κατανομή

→ $Q = (q_{ij} : i,j\in\mathcal{X})$ με $q_{ij} = P'_{ij}(0)$
πίνακας ρυθμών μετάβασης

δεξιά παράγωγος

3. Βασικοί υπολογισμοί

$$q_{ij} = P'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{P_{ij}(h)}{h} \geq 0, & i\neq j \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{P_{ii}(h)-1}{h} \leq 0, & i=j \end{cases}$$

$$P_{ij}(h) = \begin{cases} hq_{ij} + o(h), & i\neq j \\ 1 + q_{ii}h + o(h), & i=j \end{cases} \quad h\to 0^+ \left(\frac{o(h)}{h} \to 0\right)$$

Θέτω $q_i = -q_{ii} \geq 0$

$$Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}$$

q_{ij} : ρυθμός μετάβασης από την i στην j

q_i : ρυθμός εξόδου από την i

Αν $\underline{P}(t) = (P_j(t) : j \in \mathcal{X})$ μεταβατική κατανομή

με $P_j(t) = Pr[X(t) = j]$

και $\mathbb{P}(t) = (P_{ij}(t) : i,j \in \mathcal{X}) = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & \cdots \\ P_{10}(t) & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$

Τότε $\underline{P}(t)^T = \underline{P}(0)^T \mathbb{P}(t)$

Ιδέα απόδειξης:

$$P_j(t) = Pr[X(t) = j]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} Pr[X(0)=i] Pr[X(t)=j \mid X(0)=i]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_i(0) P_{ij}(t)$$

$$\mathbb{P}(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n t^n}{n!}$$

Για το $\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t}$

$$[0, t+h] = [0, t] \cup [t, t+h]$$

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$= P_{ij}(t) P_{jj}(h) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) P_{kj}(h)$$

$$= P_{ij}(t)(1 - q_j h) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} h + o(h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = -q_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(h)}{h}$$

$\left(\lim_{h \to 0^+}\right)$: $$P'_{ij}(t) = (-q_j) P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj}, \quad i, j \in X$$

$(-q_j = q_{jj})$ $$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in X} P_{ij}(t) q_{kj}$$

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q} \qquad \mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t}$$

4. Κατανομή χρόνων παραμονής
Πιθανότητα επόμενης κατάστασης

1) Αν $X(0)=i$, T_i ο χρόνος παραμονής μέχρι να φύγει από i
$T_i \sim ?$

$\{T_i > t\} = \{X(u)=i,\ 0 \le u \le t\}$

$$Pr[t < T_i \le t+h \mid T_i > t] =$$
$$Pr[X(t+h) \neq i \mid \underbrace{X(u)=i,\ 0 \le u \le t}_{X(t)=i}] + o(h)$$
$$= 1 - P_{ii}(h) + o(h)$$

$X(t)=i$ λόγω Μαρκοβιανής ιδιότητας

$o(h)$: υπάρχει πιθανότητα να φύγει και να επιστρέψει.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{Pr[t < T_i \le t+h]}{h\,Pr[T_i > t]} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

$$= \frac{f_{T_i}(t)}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i \text{ (σταθερός)}$$

$1 - F_{T_i}(t)$ → ρυθμός βλάβης (hazard rate)

$$\Rightarrow -\frac{(1 - F_{T_i}(t))'}{1 - F_{T_i}(t)} = q_i \Rightarrow \left(\log(1 - F_{T_i}(t))\right)' = -q_i$$

$$\Rightarrow 1 - F_{T_i}(t) = e^{-q_i t} \Rightarrow T_i \sim Exp(q_i)$$

2) Πιθανότητα επόμενης κατάστασης j δεδομένου ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι η i.

$$P_{ij} = \lim_{h\to 0^+} Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i, X(t+h) \neq i] \quad j\neq i$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[X(t+h)=j, X(t)=i, X(t+h)\neq i]}{Pr[X(t)=i, X(t+h)\neq i]}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i]\,\cancel{Pr[X(t)=i]}}{\cancel{Pr[X(t)=i]}\,Pr[X(t+h)\neq i \mid X(t)=i]}$$

$(1/h)$

$$\Rightarrow P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad j\neq i.$$

5. Θεώρημα - Χαρακτηρισμός ΜΑΣΧ

Έστω $\{X(t)\}$ μαρκοβιανή διαδικασία με αριθμήσιμο χ.κ. $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ $\Longleftrightarrow$

i) ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση i είναι $Exp(q_i)$

ii) δεδομένου ότι είναι στην i, η επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $P_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{q_i}$

6. Δυο ιδιότητες της Exp.

Αν $X_1 \dots X_n$ ανεξάρτητες $Exp(\lambda_i)$
$(X_i \sim Exp(\lambda_i) \ \forall i)$

1) $\min\{X_1, \dots X_n\} = X_{(1)} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

2) $$Pr\left[X_{(1)} = X_j\right] = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

7. Βασικό κριτήριο ΜΑΣΧ

$$T_i \sim Exp(q_i) = Exp\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right)$$

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_{n=1}^{\infty} q_{in}}$$

$X(t)$ ΜΑΣΧ με ρυθμούς q_{ij} $\Leftrightarrow$

i) έχει αριθμήσιμο χκ X

ii) όντας σε κατάσταση i, υπάρχουν $\overset{T_{ij}}{Exp(q_{ij})}$ χρόνοι $\forall j \neq i$ και η επόμενη μετάβαση θα γίνει σε χρόνο $\min\{T_{ij},\ j \neq i\}$ προς την κατάσταση j στην οποία επιτυγχάνεται το min

8. Παράδειγμα 1 - Διαδικασία Poisson

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $[0,t]$

κατάσταση $n \to$ επόμενη (μοναδική) $n+1$
σε $Exp(\lambda)$ χρόνο

Άρα $\{N(t)\}$ μαρκοβιανή

9. Παράδειγμα 2 - M|M|1 ουρά

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server άπειρη χωρητικότητα FCFS

$Q(t) = \#$ πελατών την στιγμή t.

κατάσταση	επ. κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

$\{Q(t)\}$ μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου