Ουρές Αναμονής 03.10.2022

Μάθημα 2

1. Αναγεννητικότητα συστήματος

$\{X(t)\}$ αναγεννητική $\iff$ $\exists\, S_1 \geq 0$ με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < +\infty] = 1$, $\{X(t) : t \geq 0\} \overset{d}{=} \{X(t) : t \geq S_1\}$
και $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ $\{X(t) : t \geq S_1\}$ ανεξάρτητα

2. Αναγεννητικές διαδικασίες σε συστήματα εξυπηρέτησης

Σε συστήματα τύπου $G/G/c$
(ανεξ. ισόνομοι χρόνοι εξυπ., ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων και μεταξύ τους ανεξάρτητοι)

Οι στιγμές που 1 πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό είναι αναγεννητικές.
$\{Q(t)\}$ αναγεννητική
\# πελατών

Αναγεννητικότητα + συνεχής κατανομή διάρκειας κύκλων
$\Downarrow$ εργοδικό θεώρημα

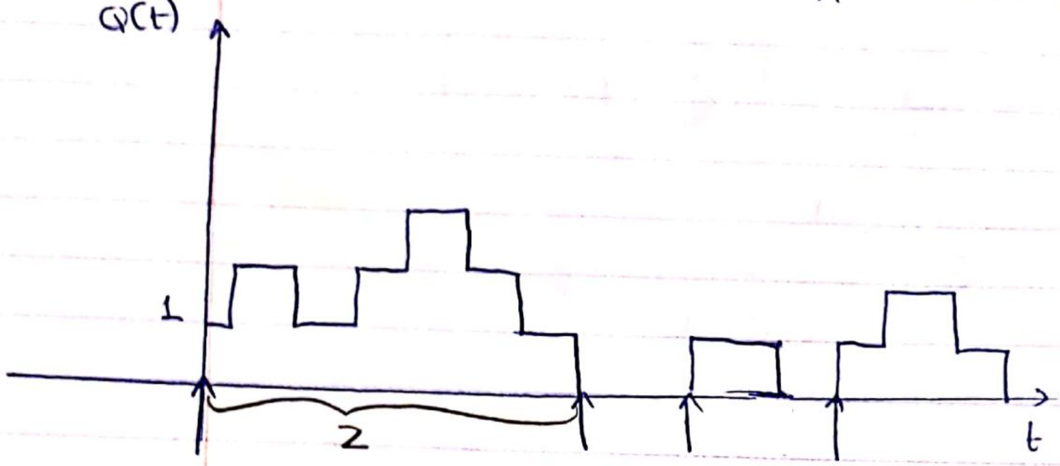
$$P_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{\int_0^t \mathbb{1}_{\{Q(u) = j\}}\, du}{t} \quad \text{(με πιθανότητα 1)}$$

πιθανότητα j άτομα στο σύστημα

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{Q(u) = j\}}\, du\right]}{t}$$

$$= \frac{\mathcal{E}\left[\int_0^Z \mathbb{1}_{\{Q(u)=j\}}\,du\right]}{\mathcal{E}[Z]}$$

- Z: κύκλος αποκατάστασης από πελάτη που βρίσκει κενό σύστημα ως τον επόμενο που βρίσκει κενό σύστημα.



$$= \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\frac{\int_0^t \Pr[Q(u)=j]\,du}{t}}_{\Pr[Q(U_t)=j] \text{ με } U_t \sim \mathrm{Unif}[0,t]} = \lim_{t\to+\infty} \Pr[Q(t)=j]$$

Ίδια αποτελέσματα ισχύουν για όλες τις άλλες πιθανότητες και ροπές

πχ $$F_S(x) = Pr[S \le x]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{S_i \le x\}}{n}$$

χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathcal{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{S_i \le x\}\right]}{n}$$

$$= \frac{\mathcal{E}\left[\sum_{i=1}^{A(z)} \mathbb{1}\{S_i \le x\}\right]}{\mathcal{E}[A(z)]}$$

$A(z) = \#$ αφίξεων στο z

$$= \lim_{n \to +\infty} \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} Pr[S_i \le x]}{n}} \longrightarrow Pr[S_{U_n} \le x]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} Pr[S_n \le x] \qquad U_n \sim discrUnif(\{1, \dots n\})$$

3. Τέσσερα βοηθητικά αποτελέσματα

I) Χαρακτηρισμός ευστάθειας
II) Ιδιότητα μεμονωμένων αφίξεων-αναχωρήσεων
III) Ιδιότητα PASTA
IV) Νόμος Little

4. Εμφυτευμένες κατανομές αριθμού πελατών σε στιγμές αφίξεων-αναχωρήσεων.

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t.

$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$: στιγμές αφίξεων πελατών

$D_1 \leq D_2 \leq \ldots$: στιγμές αναχωρήσεων πελατών.

$Q_n^- = Q(A_n^-)$: # πελατών πριν την n-οστή άφιξη (# πελατών που βρίσκει η n-οστή άφιξη)

$Q_n^+ = Q(D_n^+)$ = # πελατών που αφήνει η n-οστή αναχώρηση

$a_j = Pr[Q^- = j]$ = πιθ. j-πελατών σε στιγμή άφιξης

$d_j = Pr[Q^+ = j]$ = πιθ. j πελατών σε στιγμή αναχώρησης

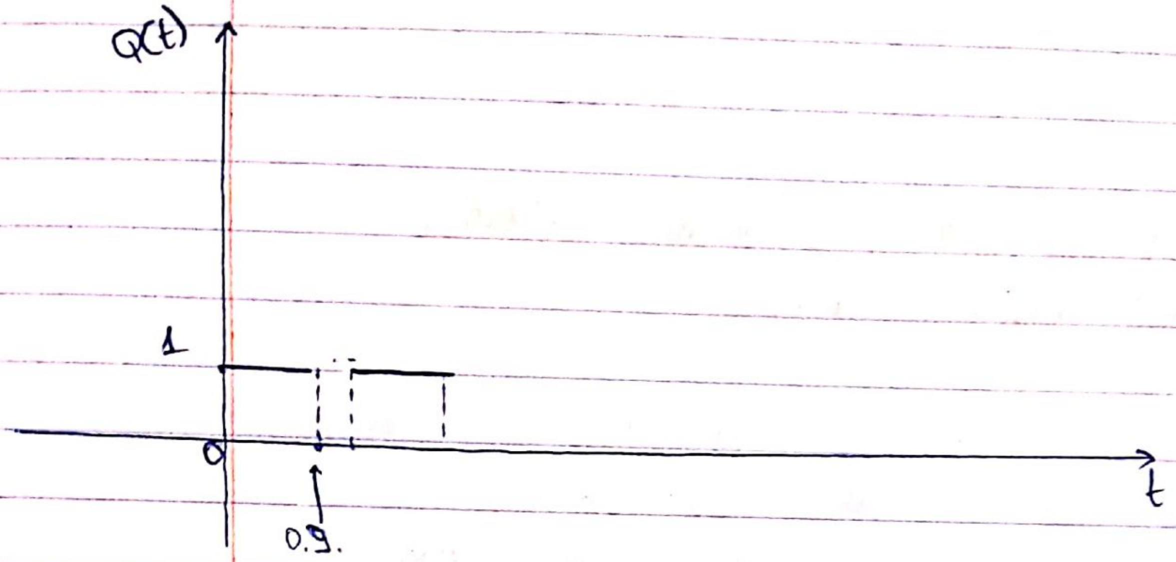
$P_j = Pr[Q = j]$: πιθ j πελατών σε συνεχή χρόνο

Παράδειγμα 1

D/D/1 σύστημα

$a = 1$ (μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων)

$b = 0.9$ (μέσος χρόνος εξυπηρέτησης).

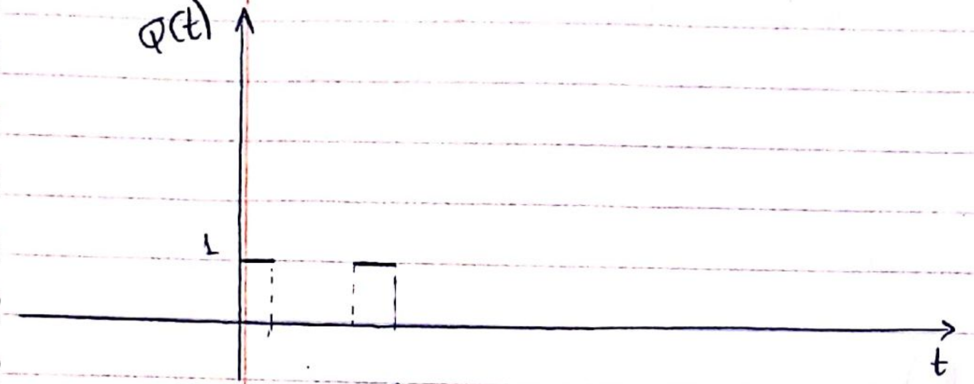


διαχειριστής

$$P_j = \begin{cases} 0.1, \text{ για } j=0 \\ 0.9, \text{ για } j=1 \\ 0, \text{ διαφορετικά} \end{cases} \qquad a_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

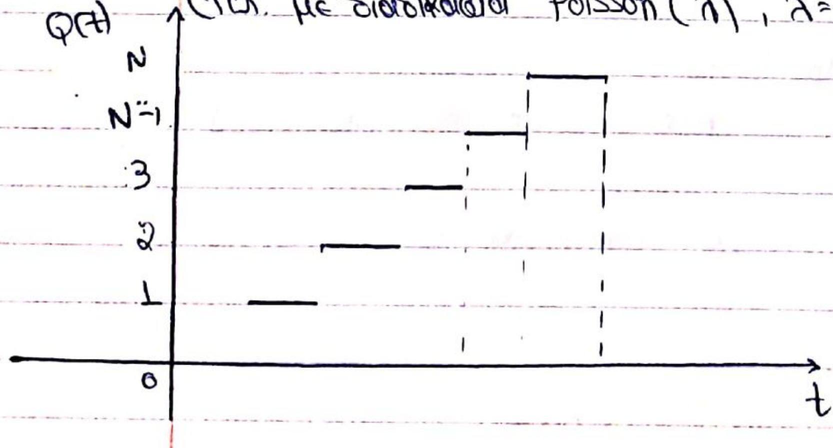
Στο ίδιο παράδειγμα αν $b=0.1$



$$P_j = \begin{cases} 0.9, & j=0 \\ 0.1, & j=1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad q_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad d_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2

Μοντέλο μεταφορικού μέσου εκκαθαρίσεων
Shuttle που αναχωρεί από στάση όταν γεμίσει
Πελάτες έρχονται με μέσους ενδιάμεσους χρόνους a
(π.χ. με διαδικασία Poisson(λ), $\lambda = 1/a$).



$$P_j = \frac{a}{Na} = \frac{1}{N} \quad 0 \le j \le N-1 \quad \left(\text{discrUnif}\{1, \ldots N\}\right)$$

$$a_j = \frac{1}{N}, \; j = 0, \dots N-1 \qquad d_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- <u>Γενική παρατήρηση:</u>

$$(a_j) \neq (d_j) \neq (p_j) \neq (a_j)$$

II) Ιδιότητα μεμονωμένων αφίξεων-αναχωρήσεων.

Μεμονωμένες αφίξεις κ' αναχωρήσεις → $(a_j) = (d_j)$

<u>Απόδειξη</u>

$$a_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}$$ με πιθανότητα 1

$A(t)$: # αφίξεων στο $(0,t]$
$A_j(t)$: # αφίξεων που βρίσκουν j πελάτες στο $(0,t]$

$$d_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$$ με πιθανότητα 1

$D(t)$ = # αναχωρήσεων στο $(0,t]$
$D_j(t)$ = # αναχωρήσεων που αφήνουν j πελάτες στο $(0,t]$

$$\lambda = \lim_{t \to +\infty} \frac{A(t)}{t} \quad : \text{ρυθμός αφίξεων}$$

$$\mu = \lim_{t \to +\infty} \frac{D(t)}{t} \quad : \text{ρυθμός αναχωρήσεων}$$

$\lambda = \mu$ (λόγω ευστάθειας)

Για μεμονωμένες αφίξεις - αναχωρήσεις, οι αφίξεις που βρίσκουν j πελάτες και οι αναχωρήσεις που αφήνουν j εμφανίζονται εναλλάξ.

Επομένως,

$$|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1$$

Άρα $$\lim_{t \to +\infty} \frac{|A_j(t) - D_j(t)|}{t} = 0$$

Συνεπώς $$\lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_j(t)}{t}$$

$$a_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{D_j(t)}{\cancel{t}}}{\frac{D(t)}{\cancel{t}}} = d_j$$

III) Ιδιότητα PASTA

Poisson Arrivals See Time Averages

Αν έχω Poisson διαδικασία αφίξεων, $(P_j)=(\alpha_j)$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $Q(t)$ = # πελατών στο $(0,t]$

$A(t,s)$ = # αφίξεων στο $(t,s]$.

$$\alpha_j = \lim_{t\to+\infty}\left[\lim_{h\to0^+} Pr\left[\,Q(t)=j \mid A(t,t+h)=1\,\right]\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\lim_{h\to0^+} \frac{\left(Pr\left[Q(t)=j\right]\right) \overbrace{Pr\left[A(t,t+h)=1 \mid Q(t)=j\right]/h}^{\to\lambda}}{\underbrace{Pr\left[A(t,t+h)=1\right]/h}_{\lambda}}\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} Pr\left[Q(t)=j\right] = P_j.$$

Πόρισμα:

Μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις και Poisson διαδικασία αφίξεων $\Rightarrow (d_j) \underset{\text{ιδ. II}}{=} (a_j) \underset{\text{PASTA}}{=} (P_j)$.

1) Χαρακτηρισμός ευστάθειας

$G|G|C$

λ: ρυθμός αφίξεων, b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho = \lambda b$: ρυθμός συνωστισμού (ένταση συνωστισμού).

<u>Μέση εισερχόμενη εργασία προς διεκπεραίωση</u>

χρονική μονάδα

Θεώρημα: Σε $G|G|C$ σύστημα όχι σε $D|D|G$

τότε αν $\rho < c$ έχω ευστάθεια

Υπάρχουν οι (P_j), (a_j), (d_j)

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} d_j = 1$$

Αν $\rho \geq c$ αστάθεια και $P_j = a_j = d_j = 0 \quad \forall j$.

Παρατήρηση: Στο $D|D|C$: $\rho > c$ αστάθεια, $\rho \leq c$ ευστάθεια