11.5-1 Μοντέλο (Q,R) με

Χρόνος καθυστέρησης $T = 2/3$ μήνες
Ζήτηση κατά τη διάρκεια T: $D \sim N(50, 15^2)$
A = μέση ετήσια ζήτηση = 900
Σταθερό κόστος παραγγελίας $K = 1500$
Κόστος αποθήκευσης = $h = 3000$ / αυτοκ. έτος
Κόστος ελλείψεων = $p = 1000$ / αυτοκ. έτος
Service level $L = 0.75$

Η ποσότητα παραγγελίας είναι $Q = \sqrt{\frac{2AK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = 60$,

δηλαδή κάθε φορά θα παραγγέλλονται 60 αυτοκίνητα.

Για τη στάθμη παραγγελίας (reorder point) R έχουμε

$$P[D \le R] = 0.75 = P\left[\frac{D-50}{15} \le \frac{R-50}{15}\right] = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[Z \le \frac{R-50}{15}\right] = 0.75 \Rightarrow \Phi\left(\frac{R-50}{15}\right) = 0.75$$, όπου $Z \sim N(0,1)$

και Φ η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για την τυπική κανονική.
Επομένως $\Phi\left(\frac{R-50}{15}\right) = 0,75 \Rightarrow \frac{R-50}{15} = 0.675$ (από πίνακες)

$$\Rightarrow R = 50 + 15 \cdot 0,675 = 60.12 = 61$$

Δηλαδή το reorder point είναι 61 που αντιστοιχεί σε απόθεμα ασφαλείας 11 αυτοκίνητα πάνω από την αναμενόμενη ζήτηση.
Δεδομένου ότι $Q = 60$, αν το απόθεμα κατά τη διάρκεια ενός T πέσει κάτω από 1 (δηλαδή η ζήτηση $D \geq 60$) τότε όταν έρθει η παραγγελία το απόθεμα θα είναι μικρότερο από R, επομένως πρέπει να γίνει η παραγγελία νωρίτερα. Η πιθανότητα να συμβεί αυτό είναι $P[D \geq 60] \approx 0.25$

19.5-3

(a)

L	k_{1-L}	C $h=1, \sigma=1$	C $h=100, \sigma=1$	C $h=1, \sigma=100$	C $h=100, \sigma=100$
0.5	0	0	0	0	0
0.75	0.674	0.674	67.4	67.4	6740
0.90	1.282	1.282	128.2	128.2	12820
0.95	1.645	1.645	164.5	164.5	16450
0.99	2.326	2.326	232.6	232.6	23260
0.999	3.090	3.090	309.0	309.0	30900

(b)

ΔL	Δk_{1-L}	ΔC $h=1, \sigma=1$	ΔC $h=100, \sigma=1$	ΔC $h=1, \sigma=100$	ΔC $h=100, \sigma=100$
0.75 - 0.5 = 0.25	0.674	0.674	67.4	67.4	6740
0.90 - 0.75 = 0.15	0.607	0.607	60.7	60.7	6070
0.95 - 0.90 = 0.05	0.363	0.363	36.3	36.3	3630
0.99 - 0.95 = 0.04	0.681	0.681	68.1	68.1	6810
0.999 - 0.99 = 0.009	0.763	0.763	76.3	76.3	7630

(c) Βλέπουμε ότι η αύξηση του L από 99% σε 99.9% δηλαδή κατά 0.9% αυξάνει το κόστος από 2.326 σε 3.090 δηλαδή κατά 0.763 ή 32,84%.

Όμοια η αύξηση από 95% σε 99% αυξάνει το κόστος από 1.645 σε 2.326 δηλαδή κατά 42%.

Στην περίπτωση που h ή σ είναι χαμηλά (3 πρώτες περιπτώσεις) οι αυξήσεις αυτές στο κόστος μπορεί να είναι ανεκτές για να αυξηθεί το επίπεδο εξυπηρέτησης. Στην τελευταία περίπτωση όμως (h=σ=100) οι οικονομικές επιπτώσεις από αυτές τις οριακές αυξήσεις του L είναι αρκετά σημαντικές κ' δεν είναι καθόλου προφανές ότι αξίζει να γίνουν.

19.5-6

Ανάγουμε όλα τα μεγέθη σε ετήσια βάση

Ζήτηση $A = 500\ lb/\text{εβδ} = 26000\ lb/\text{έτος}$

Κόστος αποθ/κε $h = 0.3\ /lb, \text{έτος}$

Κόστος ελλείψεων $p = 3\ /lb, \text{έτος}$

Επίπεδο εξυπηρέτησης $L = 0.95$

$K_{1-L} = 1.645$

(a)-(b)

Επιλογή 1 : Ground Chuck

Κόστος αγοράς : $c_1 = 1.49\ \$/lb$

Σταθερό κόστος $K_1 = 25$

Ζήτηση (τυχαία) $D \sim U(50, 150)$

Η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης είναι

$F(x) = \dfrac{x-50}{150-50} = \dfrac{x-50}{100}$, για $50 \leq x \leq 150$

Η μέση τιμή είναι $\mu = ED = \dfrac{150+50}{2} = 100$

Η ποσότητα της παραγγελίας είναι $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2K_1A}{h}}\sqrt{\dfrac{p+h}{p}} = 2183.3\ lbs$

το μέσο διάστημα μεταξύ παραγγελιών $T_1^* = \dfrac{Q_1^*}{A} = 0.084$ έτη $= 30.65$ ημέρες

Για το reorder point έχουμε

$P[D \leq R_1] = 0.95 \Rightarrow F(R_1) = 0.95 \Rightarrow \dfrac{R_1-50}{100} = 0.95 \Rightarrow R_1 = 50+95 = 145$

Επομένως όποτε το απόθεμα πέφτει σε 145 lbs γίνεται παραγγελία για 2183.3 lbs

Επιλογή 2 Chuck Wagon

Κόστος αγοράς $c_2 = 1.45\$/lb$ $(1.35+0.10)$
Σταθερό κόστος $K_2 = 200$
Ζήτηση $D \sim N(500, 200^2)$

Η ποσότητα παραγγελίας είναι

$Q_2^* = \sqrt{\frac{2K_2A}{h}}\sqrt{\frac{p+\pi}{p}} = 6175.2$ lbs και το μέσο διάστημα μεταξύ παραγγελιών $T_2 = \frac{Q_2^*}{A} = 0.238$ έτη $= 86.7$ ημέρες.

Για το reorder point έχουμε $P[D \le R_2] = L = 0{,}95$

Επειδή η ζήτηση D ακολουθεί κανονική κατανομή $D \sim N(\mu, \sigma^2)$

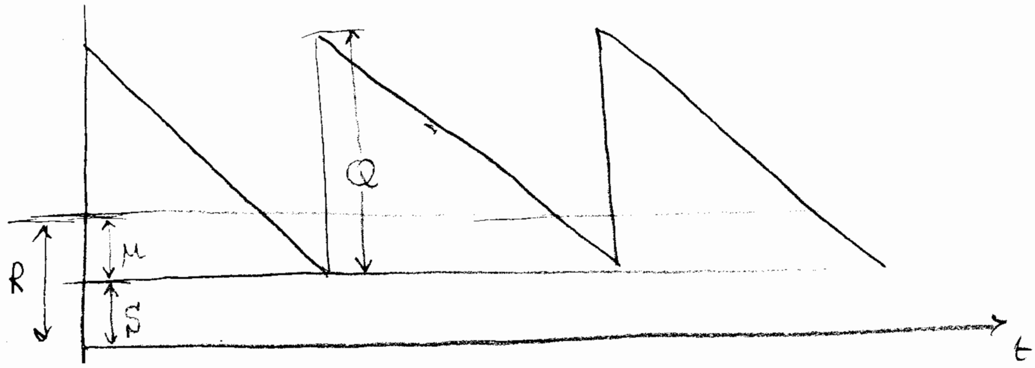
βρίσκουμε $R_2 = \mu + \sigma K_{1-L} = 500 + 200 \cdot 1.645 = 829$ lbs

Επομένως όποτε το απόθεμα πέφτει στις 829 lbs γίνεται παραγγελία για ποσότητα 6175.2 lbs.

(c) Για την επιλογή 1 το απόθεμα ασφάλειας είναι ίσο
με $S_1 = R_1 - \mu_1 = 145 - 50 = 95$ lbs

Για την επιλογή 2 : $S_2 = R_2 - \mu_2 = 829 - 500 = 329$ lbs

(d) Το γράφημα εξέλιξης της αναμενόμενης τιμής του αποθέματος για τη γενική πολιτική (Q,R) δίνεται παρακάτω



Από το σχήμα φαίνεται ότι το μέσο απόθεμα ανά μονάδα χρόνου είναι $\frac{1}{2}Q + S$, επομένως το αναμενόμενο κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$h\left(\frac{1}{2}Q + S\right)$$

Για την επιλογή 1 έχουμε $h\left(\frac{1}{2}Q_1^* + S_1\right) = 0.3\left(\frac{1}{2}2183 + 95\right) = 356 \ \$/\text{έτος}$

Για την επιλογή 2: $h\left(\frac{1}{2}Q_2^* + S_2\right) = 0.3\left(\frac{1}{2}6175 + 829\right) = 1175 \ \$/\text{έτος}$

(e) Το ετήσιο κόστος αγοράς είναι ίσο με $cA + \frac{KA}{Q}$ = κόστος αγοράς + σταθερό κόστος

Για την επιλογή 1: $c_1 A + \frac{K_1 A}{Q_1^*} = 1.49 \cdot 26000 + \frac{25 \cdot 26000}{2183} = 38740 + 297.72$

$= 39037.72 \ \$/\text{έτος}$

Για την επιλογή 2: $c_2 A + \frac{k_2 A}{Q_2^*} = (1.45)26000 + \frac{(200)\cdot 26000}{6175} = 37700 + 842.08$

$= 38542 \ \$/\text{έτος}$

(f)

Επιλογή	Κόστος Αποθ ($/έτος)	Κόστος Αγοράς ($/έτος)	Συνολικό Κόστος ($/έτος)
1	39037.7	356	39393.70
2	38542	1175	39717.08

Επομένως το συνολικό ετήσιο κόστος είναι μικρότερο για την επιλογή 1, και ο πρώτος προμηθευτής πρέπει να προτιμηθεί.

(g) Σύμφωνα με το (α) για την επιλογή 1 οι παραγγελίες γίνονται κατά μέσο όρο κάθε 30 ημέρες ενώ για την επιλογή 2 κάθε 87 ημέρες. Επομένως ο δεύτερος προμηθευτής θα πρέπει να αποκλειοθεί με βάση τον περιορισμό. Εναλλακτικά αν επιμέναμε να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή 2 (εδώ βέβαια δεν συμφέρει αλλά κάνουμε γενική συζήτηση) θα έπρεπε να προσαρμόσουμε την ποσότητα παραγγελίας έτσι ώστε το διάστημα μεταξύ παραγγελιών να είναι και εδώ ίσο με 30 ημέρες.

?. 6-2 (α) Παραλείπεται

(β) Πρόκειται για μοντέλο εφημεριδοπώλη όπου

το κόστος αγοράς $c = 1.50$

τιμή πώλησης $r = 2.50$

κόστος αποθεμάτων $h = -0.50$ (επειδή πρόκειται για αξία)

κόστος ελλείψεων $p = r = 2.50$ (δεν αναφέρεται κόστος λόγω απώλειας καλής θέλησης)

Επομένως τα δύο κόστη υπό και υπερ-παραγγελίας είναι

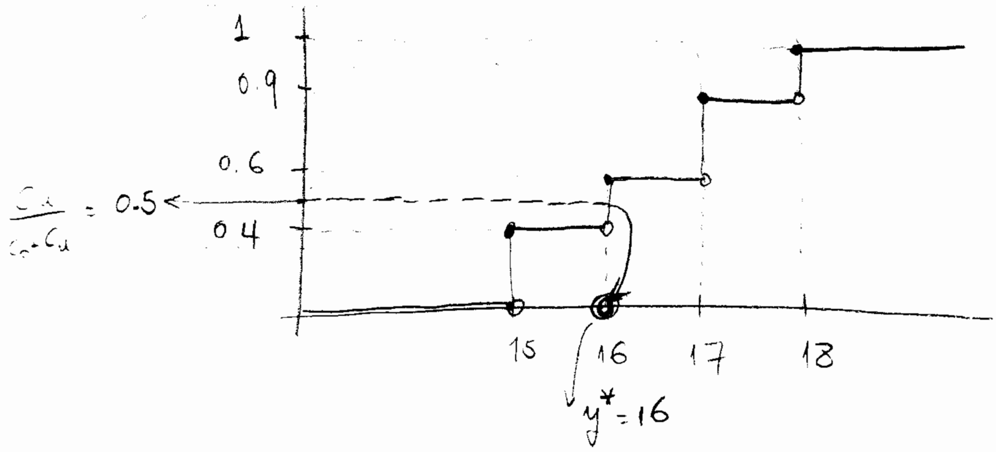
$$C_u = p - c = 1$$
$$C_o = c + h = 1$$

Η κατανομή της ζήτησης είναι διακριτή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$p(15) = 0.4,\quad p(16) = 0.2,\quad p(17) = 0.3,\quad p(18) = 0.1$$

Επομένως η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 15 \\ 0.4, & 15 \le x < 16 \\ 0.6, & 16 \le x < 17 \\ 0.9, & 17 \le x < 18 \\ 1, & x \ge 18 \end{cases}$$



Για τη διακριτή κατανομή η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι η μικρότερη ακέραια τιμή του y έτσι ώστε

$F(y) \geq \frac{C_u}{C_o+C_u}$. Εδώ $\frac{C_u}{C_o+C_u} = \frac{1}{2}$ επομένως

$F(y) \geq \frac{1}{2}$. Από τον τύπο κ' το γράφημα της

$F(x)$ παίρνουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

είναι $y^* = 16$.

12, 6-2   Στοιχεία για πρόβλημα του εφημεριδοπώλη

Κόστος Αγοράς (Παραγωγή) $c = 2$

Τιμή Πώλησης $r = 3$

Αξία Απούλητων $h = -1.5$ (αξία)

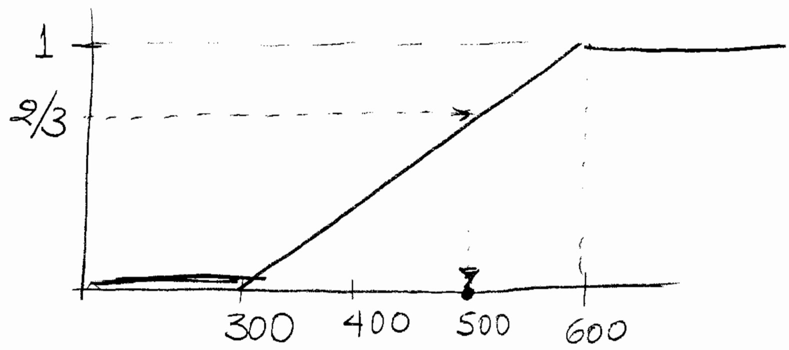
Κόστος Ελλείψεων $p = r = 3$

Κατανομή Ζήτησης $D \sim \mathcal{U}(300, 600) \Rightarrow F(x) = \dfrac{x-300}{300}, \quad 300 \le x \le 600$

(a) Το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης είναι ίσο με τον κρίσιμο λόγο $\dfrac{C_u}{C_o + C_u}$.

$$\left.\begin{aligned} C_o &= c + h = 0.5 \\ C_u &= p - c = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{C_u}{C_o + C_u} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

(b, c)



$$F(y^*) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y^* - 300}{300} = \frac{2}{3} \Rightarrow y^* - 300 = 200 \Rightarrow y^* = 500$$

Επομένως η βέλτιστη πολιτική είναι να παράγονται 500 καρβέλια ψωμιού κάθε πρωί.

(d) Η πιθανότητα ελλείψεων είναι ίση με

$$P[D>y^*] = 1-P[D\le y^*] = 1-\frac{C_u}{C_o+C_u} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(e) Αν υποθέσουμε ότι για κάθε μονάδα έλλειψης υπάρχει πρόσθετο κόστος λόγω απώλειας καλής θέλησης πελατών ίσο με $p'=1.50$, το νέο κόστος ελλείψεων γίνεται

$$p = r+p' = 3+1.5 = 4.5$$

$$C_u = p-c = 2.5$$
$$C_o = c+h = 0.5$$

και το νέο βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης είναι

$$\frac{C_u}{C_u+C_o} = \frac{2.5}{3} = \frac{5}{6},$$ και η νέα ποσότητα παραγωγής:

$$F(y^*) = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{y^*-300}{300} = \frac{5}{6} \Rightarrow y^* = 550$$

Η πιθανότητα ελλείψεων τώρα είναι $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.

19.6-7 Πρόβλημα [illegible]

[illegible]

[illegible] $= 300$

[illegible]

[illegible] $\left.\begin{array}{l} C_o = c - r = 300 \\ C_u = p - c = 9000 \end{array}\right\} \Rightarrow L^* = \dfrac{C_u}{C_o + C_u} = \dfrac{9000}{10300} = 0.874$

[illegible] Εκθετική Κατανομή: $f(\xi) = \frac{1}{50} e^{-\xi/50}, \ \xi \geq 0$

[illegible] Συνάρτηση Κατανομής $F(x) = 1 - e^{-x/50}, \ x \geq 0$

(a) Η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής είναι y^* τέτοια ώστε

$$F(y^*) = \frac{C_o}{C_o + C_u} = 0.874 \Rightarrow 1 - e^{-y^*/50} = 0.874 \Rightarrow e^{-y^*/50} = 0.126$$

$$\Rightarrow y^* = -50 \ln(0.126) = 103.49$$, δηλ. 104 κομμάτια

(b) Η βέλτιστη πολιτική όταν υπάρχει αρχικό απόθεμα x είναι

$$y(x) = \max(x_0, y^*) = \max(23, 104) = 104$$

δηλ. πρέπει να παραχθούν $104 - 23 = 101$ κομμάτια.

(c) Για $L = 0.9 \Rightarrow 1 - e^{-y/50} = 0.9 \Rightarrow e^{-y/50} = 0.1 \Rightarrow y = -50\ln(0.1) = 116$

(d) Αν το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης είναι $L = 0.9$ τότε $\frac{p-c}{p+h} = 0.9 \Rightarrow$

$\Rightarrow p - c = 0.9(p+h) \Rightarrow 0.1p = c + 0.9h \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \dfrac{c + 0.9h}{0.1} = \dfrac{1270}{0.1} = 12700$ ισοδύναμο (επαγόμενο) κόστος έλλειψης

19.6-10 Για να δούμε την αντιστοιχία με το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη ας δούμε πρώτα τα δύο είδη κινδύνων που εμπλέκονται.

Αν η εταιρεία κάνει ένα αριθμό κρατήσεων y πάνω από τη χωρητικότητα του αεροπλάνου $(y \geq 0)$ τότε δύο ενδεχόμενα μπορεί να συμβούν:

1) Αν ο αριθμός των ακυρώσεων της τελευταίας στιγμής (no-shows) D είναι $D<y$ τότε υπάρχουν $y-D$ υπεράριθμοι επιβάτες για καθένα από τους οποίους υπάρχει κόστος $h=150$ (κουπόνι)
2) Αν $D>y$ τότε θα υπάρχουν $D-y$ κενά καθίσματα στο αεροπλάνο για τα οποία υπάρχει διαφυγόν κέρδος ίσο με $p=250$ για το καθένα.
3) Το κόστος κάθε κράτησης είναι μηδενικό.
4) Κρατήσεις δεν μπορούν να αποθηκευτούν και να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες πτήσεις.

Βλέπουμε επομένως ότι υπάρχει αντιστοιχία με το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη. Η απόφαση για το απόθεμα y αντιστοιχεί στην απόφαση για υπεράριθμες κρατήσεις, η τυχαία ζήτηση αντιστοιχεί στον τυχαίο αριθμό ακυρώσεων, το κόστος overordering είναι $C_0 = h$, ενώ το κόστος underordering $C_u = p$

Επομένως ο βέλτιστος αριθμός υπεράριθμων κρατήσεων είναι τέτοιος ώστε

$$F(y^*) = \frac{C_u}{C_0 + C_u} = \frac{p}{p+h}$$