

Κεφάλαιο 3. Ιδιώτες και Θετική Γνωστικότητα

Κύρια έννοιες:

- Ιδιώτες σε C-άλγεβρας
- Θετική γνωστικότητα
- GNS κατασκευή

3.4 Ιδιότητα σε C^* -αντισταθμισμούς

Ορισ. Μια προσεγγιστική μονάδα σε ένα C^* -αντισταθμισμό A είναι ένα αλγεβρικό δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ από θετικά στοιχεία στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα της A έτσι ώστε $a = \lim_{\lambda} a u_\lambda \quad \forall a \in A$. Ισοδύναμα $a = \lim_{\lambda} u_\lambda a \quad \forall a \in A$ (γιατί).

3.4.1 Πρόβλ. Έστω $H = l^2(\mathbb{N})$ με ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Δείξτε ότι $K(H)$ να είναι α-υπονοητός, δηλαδή η κλειστή γραμμική θύκη των τελεστών:

για $x, y \in H$ $|x\rangle\langle y| : H \rightarrow H$ ε.ω. $|x\rangle\langle y|(z) = \langle y, z \rangle x$

Τότε η $K(H)$ δεν έχει μονάδα γιατί $\dim(H) = \infty$.

Έστω $p_n : H \rightarrow \mathbb{C}e_1 + \dots + \mathbb{C}e_n$ η ορθοκανονική προβολή. Τότε η $(p_n)_n$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $K(H)$.

Πράγματι για $u = |x\rangle\langle y|$ έχουμε ότι $p_n(u) = |p_n(x)\rangle\langle y|$

Όπως $p_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_H} x$ και τότε $|p_n(x)\rangle\langle y| \xrightarrow{\|\cdot\|_{B(H)}} |x\rangle\langle y|$

Τώρα για $u = \sum_{i=1}^k |x_i\rangle\langle y_i|$ έχουμε φράζοντας ότι $p_n(u) \xrightarrow{\|\cdot\|_{B(H)}} u$ και για $u \in K(H)$ χρειαζόμαστε ένα $\varepsilon/3$ ανιχνεύσιμα.

Έστω A C^* -άλγεβρα και θέσουμε Λ να είναι το σύνολο των θετικών στοιχείων της A στην ανοικτή μοναδιαία μπάλα. Τότε:

(1) Το Λ είναι μερικώς διατεταγμένο με την διάταξη των θετικών στοιχείων.
 $a \leq b \iff b - a \geq 0$.

(2) Το Λ είναι (άνω) κατευθυνόμενο:

Πrop 1o: Για $a \in A^+$ τότε $1+a \in \text{Inv}(\tilde{A})$ με
 $a(1+a)^{-1} = 1 - (1+a)^{-1}$.

Πrop 2o: Για $a, b \in A^+$ με $a \leq b$ τότε
 $a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$.

Πράγματι: $0 \leq a \leq b \implies 1+a \leq 1+b \implies$
 $\implies (1+a)^{-1} \geq (1+b)^{-1} \implies 1 - (1+a)^{-1} \leq 1 - (1+b)^{-1}$
 $\implies a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$.

Πrop 3o: Αν $a \in A^+$ τότε $a(1+a)^{-1} \in \Lambda$.

Πράγματι από Θpη αναστροφικότητας Gel'fand.

Πrop 4o: Έστω τώρα $a, b \in \Lambda$ και θέσουμε
 $a' = a(1-a)^{-1}$, $b' = b(1-b)^{-1}$, $c = (a'+b')(1+a'+b')^{-1}$

Τότε $c \in \Lambda$ και:

$$\left. \begin{aligned} a' \leq a' + b' &\implies a = a'(1+a')^{-1} \leq c \\ b' \leq b' + a' &\implies b = b'(1+b')^{-1} \leq c \end{aligned} \right\} \implies c \geq a, b.$$

3.1.1 Θεώρημα: Κάθε C^* -αλγεβρα δέχεται προσθετητική μονάδα. Για παράδειγμα θεωρούμε $u_\lambda = \lambda$ για $\lambda \in \Lambda = \{\alpha \geq 0 \mid \|\alpha\| \leq 1\}$ έχουμε ότι η $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι η (κανονική) προσθετητική μονάδα της A .

Απόδ.: Από τα εκάδια πριν αρκεί να δείξουμε ότι
$$a = \lim_{\lambda} u_\lambda \cdot a \quad \forall a \in A.$$

Εφόσον το Λ παράγει γραμμικά την A αρκεί να το δείξουμε για $a \in \Lambda$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\varphi: C^*(a) \rightarrow C(\Omega)$ η αναπαράσταση Gelfand. Για $f = \varphi(a)$ έχουμε ότι το σύνολο $K = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$ είναι συμπαγές και άρα από το λήμμα Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g: \Omega \rightarrow [0, 1]$ με συμπαγή φορέα ε.ω. $g|_K = 1$.

Έστω $\delta > 0$ έτσι ώστε $\delta \neq 1$ και $1 - \delta < \varepsilon$.

Τότε:

- για $\omega \in K$ έχουμε: $g(\omega) = 1$ και άρα $r = 1$
 $|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| = |f(\omega) - \delta f(\omega)| \leq (1 - \delta) \|f\|_\infty < \varepsilon$
- για $\omega \notin K$ έχουμε $|f(\omega)| < \varepsilon$ και άρα
 $|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| < \varepsilon (1 - \delta g(\omega)) < \varepsilon$

Επομένως $\|f - \delta_\gamma f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Για $\lambda_0 = \varphi^{-1}(\delta_\gamma)$ έχουμε $\lambda_0 \in \Lambda$ ($\lambda_0 \geq 0, \|\lambda_0\| < 1$) και ορίσως

$$\begin{aligned} \|a - u_{\lambda_0} a\| &= \|a - \lambda_0 a\| = \|\varphi(a) - \varphi(\lambda_0) \varphi(a)\|_\infty \\ &= \|f - \delta_\gamma f\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Τώρα για $\lambda_0 \neq \lambda \geq \lambda_0$ έχουμε ότι:

$$1 - u_\lambda \leq 1 - u_{\lambda_0} \Rightarrow a(1 - u_\lambda)a \leq a(1 - u_{\lambda_0})a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|a - u_\lambda a\|^2 &= \|(1 - u_\lambda)^{1/2} (1 - u_\lambda)^{1/2} a\|^2 \leq \\ &\leq \|(1 - u_\lambda)^{1/2} a\|^2 = \|a(1 - u_\lambda)a\| \\ &\leq \|a(1 - u_{\lambda_0})a\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{\lambda} u_\lambda a = a$. □

3.1.1 Σημείωση: Αν η C^* -álγεβρα A είναι διαχωρίσιμη τότε η προσεγγιστική μονάδα μπορεί να οριστεί να είναι ακολουθία.

Πιογραι, έστω $F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_m \leq \dots$ έτσι ώστε η

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ να είναι πυκνή στην A . Έστω $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια προσεγγιστική μονάδα της A . Για $\varepsilon > 0$ και

$F_n = \{a_1, \dots, a_m\}$ υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ έτσι ώστε

$$\|a_j - a_j u_{\lambda_j}\| < \varepsilon \text{ για } j \geq 1.$$

Επιλέγουμε $\lambda \in \Lambda$ έτσι ώστε $\lambda \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Τότε $\|a - e_{\lambda}\| < \epsilon$ $\forall a \in F$ και $\forall \lambda_1, \lambda_2$.

Άρα για $\epsilon = 1/n$ $\exists \lambda_n = \lambda \in \Lambda$ ε.ω. $\|a - e_{\lambda_n}\| < 1/n$
 $\forall a \in F$. Μπορούμε να επιλέγουμε σε κάθε βήμα να λ_n έτσι ώστε $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Συνεπώς

$$\lim_n \|a - e_{\lambda_n}\| = 0 \quad \forall a \in F$$

και ορίσθαι το f στην κλειστή σφαίρα A το ίδιο
έτσι για $a \in A$. Άρα η $(e_{\lambda_n})_n$ είναι προσεγγ
για την μονάδα στη A . □

3.1.2 Θεώρημα. Έστω L κλειστό οπλισμένο ιδ
ώδω στην A . Τότε υπάρχει εύρων δίκτυο (u_λ)
από θετική στοιχεία στην κλειστή μοναδιαία
μονάδα της L έτσι ώστε $a = \lim_\lambda a u_\lambda$ $\forall a \in L$.

Απόδ. Έστω $B = L \cap L^+$. Τότε η B είναι C^* -άλγεβρα
και άρα έχει προσεγγιστική μονάδα $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
Για κάθε $a \in L$ έχουμε ότι $a^*a \in B$ και έφα:

$$\|a - e u_\lambda\|^2 = \|(1 - u_\lambda) a^* a (1 - u_\lambda)\| \leq \|e^* a (1 - u_\lambda)\| \xrightarrow{\lambda} 0$$

Συνεπώς $\lim_\lambda e u_\lambda = a \quad \forall a \in L$. □

Σημ: $(1-x)b \equiv b - xb$! Άρα και αν δεν υπάρχει

3.1.3 Θεώρημα. Έστω I κλειστό ιδεώδες σε C^* -αλγεβρά A . Τότε το I είναι αυτοσυζυγές και αν (u_λ) είναι προσομοιωτική φονιάδα του I τότε:

$$\|a + I\| = \lim_{\lambda} \|a - u_\lambda a\| = \lim_{\lambda} \|a - u_\lambda^* a\|.$$

Απόδ. Από το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχει $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ προσομοιωτική φονιάδα του I . Για $a \in I$ έχουμε

$$a = \lim_{\lambda} a u_\lambda \implies a^* = \lim_{\lambda} u_\lambda^* a^* \in I.$$

Άρα το I είναι αυτοσυζυγές.

Τώρα για $a \in A$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in I$ ε.ω.

$$\|a + b\| \leq \|a + I\| + \varepsilon/2.$$

Εφόσον $b = \lim_{\lambda} u_\lambda b$ τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ε.ω.

$$\|b - u_{\lambda} b\| < \varepsilon/2 \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \|a - u_\lambda a\| &\leq \|(1 - u_\lambda)(a + b)\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &\leq \|a + b\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &< \|a + I\| + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \end{aligned}$$

Ενός του ότι $\|a + I\| = \lim_{\lambda} \|a - u_\lambda a\|.$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης} \quad \|a + I\| &= \|a^* + I\| = \\ &= \lim_{\lambda} \|a^* - u_\lambda^* a^*\| = \\ &= \lim_{\lambda} \|a - a u_\lambda\|. \end{aligned}$$



3.1.2 Lemma: Έστω I κλειστό ιδεώδες σμν A
 και J κλειστό ιδεώδες σμν I . Τότε το J είναι
 κλειστό ιδεώδες σμν A .

Πράγματι: αφού υδo $ab, ba \in J$ για $a \in A$ και $b \in J$
 και $b \neq 0$. (καθώς το δομεί ως J περιέχουν γρη
 για ως J) Για $(u_n)_n$ προσεγγιστική μονάδα

του I έχουμε $b^{1/2} = \lim_n u_n b^{1/2}$ (αφού $b^{1/2} \in I$)

Αρα: $ab = \lim_n \underbrace{au_n}_{\in I} \underbrace{b^{1/2}}_{\in I} \in J$.

Επίσης $a^*b \in J \implies ba \in J^* = J$ □

3.1.4 Θεώρημα: Έστω I κλειστό ιδεώδες σε μια
 C^* -άλγεβρα A . Τότε το πηλίκο A/I είναι C^* -άλ-
 γεβρα.

Απόδ. Αφού δo αν C^* -τονότητα. Έστω $(u_n)_n$
 προσεγγιστική μονάδα του I . Τότε για $a \in A$ και
 $b \in B$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|a + I\|^2 &= \lim_n \|a - au_n\|^2 = \lim_n \|(1 - u_n)a^*a(1 - u_n)\| \\ &\leq \sup_n \|(1 - u_n)(a^*a + b)(1 - u_n)\| + \lim_n \|(1 - u_n)b(1 - u_n)\| \\ &\leq \|a^*a + b\| + \lim_n \|(1 - u_n)b\| \\ &= \|a^*a + b\| \end{aligned}$$

$\implies \|a + I\|^2 \leq \|a^*a + I\|$ και άρα αν n C^* -ιδεώδες. □

3.1.5 Θεώρημα. Έστω A, B C^* -ιδιομορφισμοί με $\varphi: A \rightarrow B$ "1-1" *-μορφισμός. Τότε ο φ είναι ισομετρία.

Ανάλυση. Έστω $\|\varphi(a^*a)\| = \|a^*a\|$ και άρα $\|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2$.

Μπορούμε να περιοριστούμε στην $C^*(a^*a)$ και την εικόνα της μέσω του φ , άρα $x \in \gamma \cdot A$ και B είναι αβελιανός. Επίσης μπορούμε να επεκτείνουμε σε $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ και $x \in \gamma \cdot \tilde{A}$ όπου A, B, φ είναι πολλαπλασιασμοί.

Για z χαρακτηριστικό της B , η $z \circ \varphi$ είναι χαρακτηριστικό της A . Η αντιστροφή

$$\varphi': \Omega(B) \rightarrow \Omega(A); z \mapsto z \circ \varphi$$

είναι συνεχής. Επομένως $\varphi'(\Omega(B))$ είναι ανοικτός, άρα συμπίπτει με $\Omega(A)$ και άρα κλειστός.

Αν $\varphi'(\Omega(B)) \neq \Omega(A)$ τότε από Λήμμα Urysohn υπάρχει

$$f: \Omega(A) \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής } f \neq 0 \text{ με } f|_{\varphi'(\Omega(B))} = 0.$$

Από Θεώρημα αναπαράστασης Gelfand υπάρχει

$$a \in A \text{ ε.μ. } f = \hat{a}. \text{ Τότε για κάθε } z \in \Omega(B)$$

$$\text{έχουμε: } z(\varphi(a)) = \hat{a}(z \circ \varphi) = 0.$$

Επομένως $\varphi(a) = 0$, και άρα $a = 0$.

Συνεπώς $f = \hat{a} = 0$ που είναι άτοπο.

Συνεπώς $\varphi'(\mathcal{N}(B)) = \mathcal{N}(A)$ και άρα για κάθε $a \in A$ έχουμε:

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{z \in \mathcal{N}(A)} |z(a)| = \sup_{z \in \mathcal{N}(B)} |z \circ \varphi(a)| = \|\varphi(a)\|$$

$\square$

3.1.6 Θεώρημα. Αν $\varphi: A \rightarrow B$ είναι $*$ -μορφισμός μεταξύ C^* -ανελυγισμών, τότε η $\varphi(A)$ είναι κλειστό στην B , και άρα C^* -ανελυγισμός της B .

Απόδ. Η αντιστροφή: $A/\ker \varphi \rightarrow B: a + \ker \varphi \mapsto \varphi(a)$ είναι 1-1 $*$ -μορφισμός και άρα ισομορφισμός. Η σκέυη της, που είναι $= \varphi(A)$, είναι άρα κλειστή στη B . $\square$

3.1.7 Θεώρημα. Έστω A C^* -ανελυγισμός και B C^* -ανελυγισμός της A και I κλειστό ιδεώδες της A . Τότε $\overline{B+I} = B+I$.

Απόδ. Έστω $\varphi: A \rightarrow A/I$. Τότε $\varphi|_B$ είναι $*$ -μορφισμός και $\varphi|_B(B) = B+I/I$ είναι κλειστό της A/I . Συνεπώς η

$$B+I = \varphi^{-1}(B+I/I)$$

είναι κλειστό στην A ως αντιστροφή σκέυης κλειστού από συνεχή αντιστροφή. $\square$

3.1.3 Σχόλιο. Για $B \subseteq A$ υνάλγεθρα και $I \subseteq A$ κάποιο ιδεώδες των A μπορούμε να δείξουμε ότι η αντιστοιχία:

$$B/B \cap I \longrightarrow B+I/I : b+B \cap I \longmapsto b+I$$

είναι $\ast$ -ισομορφισμός.

Πολλαπλασιαστική άλγεβρα

Έστω I κάποιο ιδεώδες σε $C^\ast$ -άλγεβρα A .

Για $a \in A$ ορίζουμε $L_a, R_a \in B(I)$ μέσω:

$$L_a(b) = ab, \quad R_a(b) = ba \quad \forall b \in I.$$

Τότε το ζεύγος $(L_a, R_a) \in M(I)$ και η αντιστοιχία

$$\varphi: A \rightarrow M(I) : a \mapsto (L_a, R_a)$$

είναι $\ast$ -μορφισμός που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $I \rightarrow M(I)$:

Σχόλιο Έστω I, J κάποια ιδεώδη της A . Τότε:

$$I \cap J = \overline{\text{span}} \{ab : a \in I, b \in J\} =: IJ.$$

Πράγματι από το προηγούμενο $IJ \subseteq I \cap J$.

Για την " $\supseteq$ " αρκεί να δείξουμε ότι αν $a \in I$ και $b \in J$ τότε $ab \in IJ$.

Έστω λοιπόν $a \in (I \cap I)^+$. Τότε $a^k \in I \cap I$.

Για (χ_λ) την προσεγγιστική μονάδα του I έχουμε: $a = \lim_{\lambda} (\chi_\lambda a^{1/2}) a^{1/2} \in II$. □

Ορσ. Έστω I κλειστό ιδεώδες της A . Λέμε ότι το I είναι ουσιώδες στην A αν ισχύει:

$$aI = (0) \implies a = 0 \quad (\text{ισχύει } Ia = (0) \implies a = 0).$$

Ισοδύναμα, I ουσιώδες αν και μόνο αν $I \cap I \neq (0)$ για κάθε $I \neq (0)$ κλειστό ιδεώδες της A .

Πρδγ. Κάθε κλειστό ιδεώδες I είναι ουσιώδες στην $M(I)$.

3.2.8 Θεώρημα. Έστω I κλειστό ιδεώδες της A . Τότε υπάρχει μοναδικός $*$ -homomorphism $\varphi: A \rightarrow M(I)$ που αντιστοιχεί τον $I \hookrightarrow M(I)$. Αν το I είναι ουσιώδες στην A τότε η φ είναι 1-1.

Απόδ. Έχουμε ήδη δείξει για αντιστοιχία της $I \hookrightarrow M(I)$. Έστω $\varphi: A \rightarrow M(I)$ μια 2η αντιστοιχία. Για $a \in A$ και $b \in I$ έχουμε:

$$\varphi(a)b = \varphi(ab) = ab = \varphi(ab) = \varphi(a)b$$

Αρα $(\varphi(a) - \varphi(a))I = (0)$ και άρα $\varphi(a) = \varphi(a)$.

Έστω τώρα ότι το I είναι ουσιώδης στην A ,
 και έστω α κενό. Τότε: $\alpha I = L_\alpha(I) = \{0\}$
 και έρα $\alpha = 0$. Άρα η φ είναι "1-1". □

Πρτρ. Συνολώς η $M(I)$ είναι η περικλυμένη πο-
 νοδωία C^* -άλγεβρα που περιέχει το I σαν
 ουσιώδες ιδεώδες.

3.1.2 Πρδχ. Έστω H χώρος Hilbert.

(1) $K(H)$ είναι ουσιώδες ιδεώδες στην $B(H)$.

ανόδ. Έστω $u \in B(H)$ ε.ω. $u K(H) = \{0\}$. Τότε για
 κάθε $x \in H$ έχουμε $|u(x)\rangle \langle x| = u \cdot |x\rangle \langle x| = 0$
 και έρα $u(x) = 0$.

(2) Η αντιστοιχία $\varphi: B(H) \rightarrow M(K(H))$ είναι
 H -ισομορφισμός.

ανόδ. Αρκεί να είναι ανί. Έστω $(L, R) \in M(K(H))$
 και $e \in H$ με $\|e\|_H = 1$ H αντιστοιχία

$$u: H \rightarrow H: x \mapsto (L(|x\rangle \langle e|))(e)$$

είναι φραγμένη διότι

$$\|u(x)\| \leq \|L(|x\rangle \langle e|)\| \leq \|L\| \cdot \| |x\rangle \langle e| \|$$

$$= \|L\| \cdot \|x\|.$$

Τώρα για $x, y, z \in H$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 L_u(|x\rangle\langle y|)(z) &= (|u(x)\rangle\langle y|)(z) \\
 &= \langle z, y \rangle (L(|x\rangle\langle e|))(e) = \\
 &= L(|x\rangle\langle e|)(\langle z, y \rangle e) = \\
 &= (L(|x\rangle\langle e|))(|e\rangle\langle y|)(z).
 \end{aligned}$$

Σημειώνω:

$$\begin{aligned}
 L_u(|x\rangle\langle y|) &= L(|x\rangle\langle e|)(|e\rangle\langle y|) = \\
 &= L(|x\rangle\langle y|) \quad \forall x, y \in H
 \end{aligned}$$

Άρα $L_u = L$. □

3.1.3 Πρόβλημα: Έστω Ω τοπικά συμπαγής (και συμπαγής) χώρος Hausdorff. Τότε:

(1) $C_0(\Omega)$ είναι ουσίως ιδεώδες στην $C_b(\Omega)$ (γιατί)

(2) Η αντιστροφή $\varphi: C_b(\Omega) \rightarrow M(C_b(\Omega))$ είναι $\ast$ -ισομορφισμός.

Απόδειξη: Αρκεί να αν $g \in M(C_b(\Omega))$ τότε υπάρχει $h \in C_b(\Omega)$ ε.ω. $h f = g f \quad \forall f \in C_b(\Omega)$.

Έστω $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ προθεγμενική μονάδα στην $C_0(\Omega)$.

Τότε το διάνυσμα $(g(u_n)(\omega))_n$ είναι αίψαν και άνω φραγμένο στο $\|g\|$ στο $\mathbb{R}^+$ και άρα συνεκδικύει. Θέτουμε $h(\omega) = \lim_n g(u_n)(\omega)$.

• Η αντιστροφή $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό

• Για $f \in C_0(\mathcal{R})$ έχουμε $h f = g f$ όπου:

$$(h f)(\omega) = h(\omega) f(\omega) = \lim_{\lambda} g(\omega) u_{\lambda}(\omega) f(\omega) = g(\omega) f(\omega), \text{ για } \omega \in \mathcal{R}$$

• Η h είναι συνεχής:

Έστω $(\omega_p)_p \in \mathcal{R}$ με $\lim_p \omega_p = \omega$. Έστω K συνεχής περιοχή του ω . Χρησιμοποιούμε $(\omega_p)_p \in K$.

Από Λήμμα Urysohn υπάρχει $f \in C_0(\mathcal{R})$ έτσι ώστε $f|_K = 1$ και $0 \leq f \leq 1$. Εφόσον $f h \in C_0(\mathcal{R})$ τότε

έχουμε:

$$h(\omega) = (f h)(\omega) = \lim_p (f h)(\omega_p) = \lim_p h(\omega_p).$$

Επομένως $h \in C_0(\mathcal{R})$.

□

3.3 Θετική γραμμική συναρτησυνολισμός

Ορισ. Έστω $\varphi: A \rightarrow B$ γραμμικός για C^* -ιδιοτελές A και B . Η φ καλείται θετική αν $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.

Προσ. Αν η $\varphi: A \rightarrow B$ είναι θετική τότε είναι και αυτοσυνυγής, δηλαδή $\varphi(a)^* = \varphi(a^*) \quad \forall a \in A$.

• Έστω $a = a^*$ τότε οδο $\varphi(a)^* = \varphi(a) = \varphi(a^*)$.

ανιδ. Από θεωρήματα Gelfand μπορούμε να γράψουμε $a = a_+ - a_-$ με $a_+, a_- \in A^+$ (και $a_+ \cdot a_- = 0$).

Τότε: $\varphi(a)^* = \varphi(a_+)^* - \varphi(a_-)^* = \varphi(a_+) - \varphi(a_-) = \varphi(a)$
 $\uparrow$ θετική συνολ.

• Τώρα έστω $a \in A$ και οδο $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$.

ανιδ. Γράψουμε $a = a_1 + ia_2$ με $a_1, a_2 \in A_{sa}$. Από το προηγούμενο έχουμε ότι $\varphi(a_1)^* = \varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)^* = \varphi(a_2)$ και άρα:

$$\begin{aligned} \varphi(a)^* &= (\varphi(a_1) + i\varphi(a_2))^* = \varphi(a_1)^* - i\varphi(a_2)^* = \\ &= \varphi(a_1) - i\varphi(a_2) = \varphi(a_1 - ia_2) = \varphi(a)^* \quad \square \end{aligned}$$

Σημείωση Έστω $\varphi: A \rightarrow B$ *-μορφισμός. Τότε η φ είναι θετική. Πράγματι για $a \in A^+$ υπάρχει $c \in A$ έτσι ώστε $a = c^*c$ και άρα:

$$\varphi(a) = \varphi(c^*c) = \varphi(c)^* \varphi(c) \in B^+.$$

3.3.1 Πρόβλ: Έστω $A = C(\pi)$ και m το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στον π (που φορτίζει μήκος στην περιφέρεια). Τότε το γραμμικό συναρτηθεοειδές:

$$C(\pi) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \int f dm$$

δίνει θετικό (αλλά όχι $*$ -φορμωτός) (γιατί)

3.3.2 Πρόβλ: Έστω $A = M_n(\mathbb{C})$. Το γραμμικό συναρτηθεοειδές:

$$\text{Tr}: A \rightarrow \mathbb{C} : (a_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

δίνει θετικό (αλλά όχι $*$ -φορμωτός) (γιατί)

Όπως έχουμε πει η $M_n(\mathbb{C})$ δεν έχει κανονική (ή η-η-δονικώς) πολλαπλότητα.

Σημείωση: Έστω A C^* -άλγεβρα και $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ θετικό γραμμικό συναρτηθεοειδές. Τότε η ανεικόνιση,

$$A \times A \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) \mapsto \tau(b^*a)$$

δίνει θετική ημιδεφνική. Γνωρίζουμε:

- $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$
- $|\tau(b^*a)| \leq \tau(a^*a)^{1/2} \tau(b^*b)^{1/2}$ $\checkmark_{a, b \in A}$
- η ανεικόνιση $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ δίνει ημινόρμα στην A .

Σημείωση. Έστω $z: A \rightarrow \mathbb{C}$ μόνο γραμμική και υπο-

θεωρούμε ότι: $|z(a)| \leq M \quad \forall a \in A^+ \text{ με } \|a\| \leq 1$.

Τότε η z είναι φραγμένη με $\|z\| \leq 4M$.

Πράγματι: Έστω καταρχάς $a \in A^+$ με $\|a\| \leq 1$ και γράψουμε $a = a_+ - a_-$ όπου $\|a_+\| \leq 1, \|a_-\| \leq 1$ από τον ορισμό τους. Τότε:

$$|z(a)| = |z(a_+) - z(a_-)| \leq 2M.$$

Έστω τώρα ότι $a \in A$ με $\|a\| \leq 1$ και γράψουμε $a = a_1 + i a_2$. Παρατηρούμε ότι από $\|a_1\| \leq 1$ και $\|a_2\| \leq 1$ από τον ορισμό τους ως πραγματικό και φανταστικό μέρος του $a \in A$. Τότε:

$$|z(a)| = |z(a_1) + i z(a_2)| \leq 2M + 2M = 4M. \quad \square$$

3.3.1 Θεώρημα: Έστω $z: A \rightarrow \mathbb{C}$ θετικό συναρτητικό είδος σε C^* -άλγεβρα A . Τότε είναι φραγμένο.

Απόδ. Αν z δεν είναι φραγμένο τότε:

$$\sup \{ |z(a)| : a \in A^+, \|a\| \leq 1 \} = +\infty$$

Τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(a_n) \in A^+$ έτσι ώστε: $\|a_n\| \leq 1 \quad \forall n$ και $2^n \leq z(a_n) \quad \forall n$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το

$$\text{εξέχον: } a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \in A^+$$

Τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ προκύπτει:

$$N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right) = \tau\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{2^n}\right) \leq \tau(a) < \infty$$

$$1 \leq \tau\left(\frac{a^n}{2^n}\right) \quad \forall n$$

που δίνει άζωτο. $\square$

3.3.2 Θεώρημα. Έστω $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ θετικό συναρτη. οοσίδιο σε C^* -άλγεβρα A . Τότε:

$$(i) \quad \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} \quad \forall a \in A$$

$$(ii) \quad |\tau(a)|^2 \leq \|\tau\| \tau(a^*a) \quad \forall a \in A.$$

Απόδ. Το (i) έχει δείξει προηγου. Για το (ii).

Έστω $(u_n)_n \in A$ προσεγγιστική μονάδα. Τότε:

$$|\tau(a)|^2 = \lim_{\uparrow} |\tau(u_n a)|^2 \leq \sup_n \tau(u_n u_n) \tau(a^* a) \leq \|\tau\| \tau(a^* a).$$

συνέχεια του τ

3.3.3 Θεώρημα. Έστω $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ φραγμένο συναρ. οοσίδιο σε C^* -άλγεβρα A . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) τ είναι θετικό

(2) $\|\tau\| = \lim_n \tau(u_n)$ για κάθε προσεγγιστική μονάδα $(u_n)_n$ της A

(3) $\|\tau\| = \lim_n \tau(u_n)$ για κάποια προσεγγιστική μονάδα $(u_n)_n$ της A .

Απόδ. Χθγ υποθέτουμε ότι $\|z\| = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Έστω z θετικό και $(u_n)_n$ προσεγγιστική μονάδα ως A . Τότε $(z(u_n))_n \subseteq \mathbb{R}^+$ είναι εύφωτο διάνυσμα, ενώ φραγμένο και από πληρότητα του $\mathbb{R}$ έχουμε ότι συχλίνει στο supremum του. Έτσι

$$\lim_n z(u_n) = \sup_n z(u_n) \leq \|z\| = 1. \quad (i)$$

Τώρα για $a \in A$ με $\|a\| \leq 1$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |z(u_n a)|^2 &\leq z(u_n^2) z(a^* a) \stackrel{u_n^2 \leq u_n}{\leq} z(u_n) z(a^* a) \\ &\leq z(u_n) \leq \lim_n z(u_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z(a)|^2 \leq \lim_n z(u_n) \quad \forall a \in A, \|a\| \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 = \|z\|^2 \leq \lim_n z(u_n). \quad (ii) \quad \text{Από (i) + (ii)}$$

$$\text{Έχουμε ότι} \quad \|z\| = 1 = \lim_n z(u_n).$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Προφανές

(3) $\Rightarrow$ (1): Έστω $(u_n)_n \subseteq A$ προσεγγιστική μονάδα με $\lim_n z(u_n) = \|z\| = 1$. Έστω $a \in A$ με $\|a\| \leq 1$ και γράφουμε:

$$z(a) = \alpha + i\beta \quad \text{για} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Θδο $z(a) \in \mathbb{R}$ και χθγ υποθέτουμε $\beta > 0$.

Για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|a - in u_n\|^2 &= \|(a + in u_n)(a - in u_n)\| = \\ &= \|a^2 + n^2 u_n^2 - in(a u_n - u_n a)\| \leq 1 + n^2 + n \|a u_n - u_n a\|. \end{aligned}$$

Αρα: $|z(a - inu_n)|^2 \leq 1 + n^2 + n \|au_n - u_n\|$

Περαιτέρω από για n έχουμε ότι:

$$|\alpha + i\beta - in|^2 = \lim_n |z(a) - in z(u_n)|^2 \leq \lim_n 1 + n^2 + n \|au_n - u_n\| = 1 + n^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2 \leq 1 + n^2$$

$$\Rightarrow -2n\beta \leq 1 - \beta^2 - \alpha^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\beta \leq 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Επομένως $\overline{z(a)}^* = z(a) = z(a^*) \quad \forall a \in A_{sa}$.

Τώρα έστω ότι $a \in A^*$ με $\|a\| \leq 1$. Τότε

$u_n - a \in A_{sa}$ με $\|u_n - a\| \leq 1$ (Αρα: (γιατί);)

$$z(u_n - a) = |z(u_n - a)| \leq \|z\| = 1.$$

$$\Rightarrow 1 - z(a) = \lim_n z(u_n) - z(a) \leq 1 \Rightarrow z(a) \geq 0. \quad \square$$

3.3.4 Πρόταση Αν $z: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμικό ευρεπνομορφισμό σε φανερά C^* -άλγεβρα A τότε: z θετικό $\iff z(1) = \|z\|$.

3.3.5 Πρόταση. Αν $z, z': A \rightarrow \mathbb{C}$ θετικά γραμμικά ευρεπνομορφισμοί σε C^* -άλγεβρα A τότε $z + z'$ είναι θετικό και:

$$\|z + z'\| = \lim_n z(u_n) + z'(u_n) = \|z\| + \|z'\|.$$

-7.

Ορισμός. Ένα θετικό γραμμικό συναρτησμοσύνον $\tau: A \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται state αν $\|\tau\| = 1$. Παράγεται $S(A)$ για το σύνολο των states στην A .

3.3.6 Θεώρημα. Έστω a φασιολογικό στοιχείο σε $A \neq \{0\}$ C^* -άλγεβρα. Τότε υπάρχει $\tau \in S(A)$ έτσι ώστε $\|a\| = \tau(a)$.

Απόδ. Χβ-γ υποδιόμαστε $a \neq 0$. Έστω B η C^* -άλγεβρα που παράγεται από $1 \in \tilde{A}$ και $a \in A \subseteq \tilde{A}$ (έβα γενν $\tilde{A}$). Εφόσον η B είναι πεπεδομένη και η $\hat{a}$ συνεχής στο συμπαγές $\Omega(B)$ υπάρχει $\tau_2 \in \Omega(B)$ ε.ω. $\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\tau_2(a)|$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει φρεγμένο γραμμικό συναρτησμοσύνον τ_1 στην $\tilde{A}$ που επεκτείνεται το τ_2 με

$$1 = \tau_2(1) = \tau_1(1) = \|\tau_1\| = 1 = \|\tau_2\|.$$

Εφόσον $\tau_1(1) = 1$ έχουμε ότι το τ_1 είναι θετικό. Ορίζουμε $\tau = \tau_1|_A$. Τότε $|\tau(a)| = \|a\|$ και τ θετικό. Τέλος:

$$\|a\| \cdot \|\tau\| \geq |\tau(a)| = \|a\| \implies \|\tau\| \geq 1$$

Όμως $\|\tau\| \leq \|\tau_1\| = 1$ και άρα $\|\tau\| = 1$.

Άρα τ είναι state της A . □

3.3.7 Θεώρημα. Έστω τ θετικό γραμμικό συναρτημοσύνολο σε C^* -άλγεβρα A .

(1) Για κάθε $a \in A$ έχουμε:

$$\tau(a^*a) = 0 \iff \tau(ba) = 0 \quad \forall b \in A$$

(2) $\|\tau(b^*a^*ab)\| \leq \|a^*a\| \cdot \tau(b^*b) \quad \forall a, b \in A$.

Απόδ. Η (1) έπεται από Cauchy-Schwarz.

(2) Από (1) αβγ έστω $b \in A$ με $\tau(b^*b) > 0$. Η

συνάρτηση $\rho: A \rightarrow \mathbb{C}: c \mapsto \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}$

είναι θετική και γραμμική. Από μια $(u_n)_n$ προσέγγιση προς $\|a\|$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|a\| &= \lim_n \rho(u_n) = \lim_n \frac{1}{\tau(b^*b)} \tau(b^*u_n b) = \\ &= \frac{1}{\tau(b^*b)} \tau(b^*b) = 1. \end{aligned}$$

Επομένως $\rho(a^*a) \leq \|a^*a\|$ και έπεται το (2). 

3.3.8 Θεώρημα. Έστω $B \subseteq A$ C^* -υπόάλγεβρα μιας C^* -άλγεβρας A . Έστω τ θετικό γραμμικό συναρτημοσύνολο της B . Τότε υπάρχει τ' θετικό γραμμικό συναρτημοσύνολο της A ώστε:

$$\tau'|_B = \tau \quad \text{και} \quad \|\tau'\| = \|\tau\|.$$

Ανάλυση. Έστω πρώτα $A = \tilde{B}$. Τότε ορίζουμε $-9-$
 $z': \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$ με $z'(b, \tau) = z(b) + \tau \|z\|$.

Για $(u_n)_n$ προσεγγιστική μονάδα στο B έχουμε

$$|z'(b, \tau)| = \lim_n |z(bu_n) + \tau z(u_n)| =$$

$$= \lim_n |z(bu_n + \tau u_n)| \leq$$

$$\leq \sup_n \|z\| \|(b, \tau)(u_n, 0)\|_{\tilde{B}} \leq$$

$$\leq \|z\| \|(b, \tau)\|_{\tilde{B}} \Rightarrow \|z'\| \leq \|z\|.$$

Όπως $z'|_B = z$ και άρα $\|z\| \leq \|z'\|$. Άρα $\|z'\| = \|z\|$.

Επομένως $\|z'\| = \|z\| = z'(1)$ και άρα z' θεωρείται

Τώρα έστω $A \neq B$. Τότε $\tilde{B} \in \tilde{A}$ και μπορούμε να συνεχίσουμε z σε z' στην $\tilde{B}$. Από

Θεώρημα Hahn-Banach συνεχίζουμε z' σε

$$z'' \text{ στην } \tilde{A} \text{ με } \|z''\| = \|z'\| = z'(1_{\tilde{B}}) = z'(1_{\tilde{A}})$$

Άρα z'' είναι θεωρία και $z''|_B = z$. $\square$

3.3.4 Θεώρημα. Έστω $I \triangleleft A$ ιδεώδες για $\mathbb{C}$ -αλγεβρά

A . Τότε κάθε θεωρία αντιστοιχίας z στην I έχει μοναδική επέκταση στην A με έστω:

$$[a \in A: z'(a) = \lim_n z(u_n a u_n) \text{ για κάποια } (u_n)_n \text{ προσεγγιστική μονάδα στην } I].$$

Απόδ. Έχουμε ήδη ύπαρξη επέκτασης
και μένει να δείξουμε μοναδικότητα.

Έστω z' δεύτερη αναρμωσισμός του A με
 $\|z'\| = \|z\|$ και έστω επέκταση του z' στον
 $\tilde{A}$ (και άρα μοναδική αφού $z'(\mathbf{1}_{\tilde{A}}) = \|z'\| = \|z\|$;
Για $(u_n)_n \in I$ προσεγγιστική μονάδα στο I
έχουμε:

$$\lim_n z(u_n) = \|z\| = \|z'\| = z'(\mathbf{1}_{\tilde{A}})$$

$$\Rightarrow \lim_n z'(\mathbf{1}_{\tilde{A}} - u_n) = 0.$$

Αρα για $a \in A$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |z'(a) - z(u_n a u_n)| &\leq |z'(a - u_n a)| + |z'(u_n a - u_n a u_n)| \\ &\leq z'((1 - u_n)^2)^{1/2} z'(a^* a)^{1/2} + z'(u_n^2 u_n a)^{1/2} z'((1 - u_n)^2)^{1/2} \\ &\leq z'(1 - u_n) z(a^* a)^{1/2} + z'(a^* a)^{1/2} z'(1 - u_n)^{1/2} \\ &\xrightarrow{2} 0. \end{aligned}$$

Οπότε $\lim_n z(u_n a u_n) = z'(a).$ □

Σημ. Παρατηρούμε ότι η ίδια απόδειξη δουλεύει
για $B \in A$ ανάλυστρεβα με την ιδιότητα $u_a u_a B$
 $\forall a \in A$. Για παράδειγμα όταν η B είναι her-
editary (οπ6: $b a b' \in B \forall a \in A, b, b' \in B$
 $\Rightarrow$ αν $0 \leq a \leq b$ τότε $a \in B$).

Σημείωση: Έστω $\mathcal{D}$ ευκλείδειος + Hausdorff χώρος.

Από Riesz-Markov-Kakutani για κάθε $\mu \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R})^*$

υπάρχει μοναδικό πραγματικό μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$

ε.ω. $\mu(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.

Γνωρίζουμε: $\|\mu\| = \|\mu\|$

• $\mu(f) \geq 0 \quad \forall f \geq 0 \iff \mu$ θετικό μέτρο.

Η διασύνταξη Jordan ενός πραγματικού μέτρου
 δίνει ότι υπάρχουν θετικά μέτρα $\mu^+, \mu^- \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$
 έτσι ώστε $\mu = \mu^+ - \mu^-$ και $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$.

Επομένως $\forall \mu \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R})^*$ υπάρχουν θετικά $\mathbb{R}$ -ω-
 μετρήσιμα μ_+, μ_- έτσι ώστε:

$\mu = \mu_+ - \mu_-$ και $\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\|$.

Από αυτό φαίνεται και στο επίπεδο των $\mathbb{C}$ -αλγεβρών

Πρόταση: Έστω A $\mathbb{C}$ -αλγεβρά και $\mu \in A^*$. Τότε:

$$\|\mu\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\operatorname{Re}(\mu(a))|$$

γιατί $\forall a \in A$ με $\|a\| \leq 1$ υπάρχει $\theta \in \mathbb{T}$ ε.ω. $\operatorname{Re}(\mu(a)) \leq \|\mu\|$
 και τότε $|\mu(a)| = |\operatorname{Re}(\mu(a))| \leq \|\mu\|$.

Για $\mu \in A^*$ ορίζουμε $\mu^* \in A^*$ μέσω:

$$\mu^*(a) = \overline{\mu(a^*)} \quad \forall a \in A$$

Επομένως $\|\mu^*\| = \|\mu\|$ και $\|\mu\| = \|\mu^*\|$

- Λέμε ότι $z \in A^*$ είναι αυτοσυζυγής αν $z = z^*$.
- Κάθε $z \in A^*$ γράφεται ως $z = z_1 + iz_2$ με z_1, z_2 αυτοσυζυγείς. Τρίτη του πιάρε:
$$z_1 = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{1}{2i}(z - z^*).$$

• Η συνθήκη $z = z^*$ είναι ισοδύναμη με $z(A_{\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}$.
και άρα $z = z^*$ αν και μόνο αν $z|_{A_{\mathbb{R}}} : A_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$
είναι πραγματικό $\mathbb{R}$ -γραμμικό συναρτημοσύνολο.
Οπότε έχουμε ότι: $\|z\| = \|z|_{A_{\mathbb{R}}}\|$ διότι:

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sup_{\|a\| \leq 1} |\operatorname{Re}(z(a))| \leq \sup_{\substack{b \in A_{\mathbb{R}} \\ \|b\| \leq 1}} |z(b)| = \|z|_{A_{\mathbb{R}}}\|. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \operatorname{Re}(z(a)) = z(\operatorname{Re}(a)) \end{aligned}$$

• Γράφουμε $A_{\mathbb{R}}^*$ το σύνολο των αυτοσυζυγών συναρτημοσυνόλων στην A^* και $A_{\mathbb{R}}^+$ το σύνολο των θετικών συναρτημοσυνόλων στην A^* .

• Γράφουμε $X^\#$ για τον $\mathbb{R}$ -δual ενός $\mathbb{R}$ -χώρου Banach. Τότε ο $A_{\mathbb{R}}$ είναι $\mathbb{R}$ -χώρος Banach ο $A_{\mathbb{R}}^*$ είναι $\mathbb{R}$ -υπόχωρος του A^* και η αντιστοιχία $A_{\mathbb{R}}^* \rightarrow A_{\mathbb{R}}^\# : z \mapsto z|_{A_{\mathbb{R}}}$ είναι $\mathbb{R}$ -ισομορφισμός.

3.3.40 Θεώρημα. Έστω $z \in A_{\Sigma}^*$ για A C^1 -ιδιο-
γυαία. Τότε υπάρχουν $z_+, z_- \in A_+^*$ ε.ω:

$$z = z_+ - z_- \quad \text{και} \quad \|z\| = \|z_+\| + \|z_-\|.$$

Απόδ. Έστω $\Omega = \{z \in A_+^* \mid \|z\| \leq 1\}$. Τότε το
 Ω είναι w^* -κλειστό στο $(A^*)_*$ και άρα Hausdorff
και w^* -συμπαγές.

Για $a \in A_{\Sigma}$ ορίζουμε $\Theta(a) \in C(\Omega, \mathbb{R})$ τέ:

$$\Theta(a)(z) = z(a).$$

Η αντιστοίχηση $\Theta: A_{\Sigma} \rightarrow C(\Omega, \mathbb{R})$ $a \mapsto \Theta(a)$
δίνει $\mathbb{R}$ -γρομφάκι και $\Theta(a) \geq 0$ για $a \in A_+$.

Από Θρτ 3.3.6 είναι επίσης ισομετρική.

Για $z \in A_{\Sigma}^*$ ορίζουμε $z' = z|_{A_{\Sigma}}$ και τότε $z' \in A_{\Sigma}^{\#}$.

Από Hahn-Banach $\exists p \in C(\Omega, \mathbb{R})^{\#}$ ε.ω:

$$p \circ \Theta = z' \quad \text{και} \quad \|p\| = \|z'\|.$$

Από πρόβλημα υπάρχουν $p_+, p_- \in C(\Omega, \mathbb{R})^{\#}$ οπότε
έτσι ώστε:

$$p = p_+ - p_- \quad \text{και} \quad \|p\| = \|p_+\| + \|p_-\|$$

Ορίζουμε $z'_+ := p_+ \circ \Theta$ και $z'_- := p_- \circ \Theta$. Τότε
 $z'_+, z'_- \in A_{\Sigma}^{\#}$.

- 14 -

Gezw $z_+, z_- \in A_{sa}^*$ s.w. $z_+|_{A_{se}} = z'_+$ $z_-|_{A_{sa}} = z'_-$

7.2.6:

- $z = z_+ - z_-$

- $\|z\| = \|z'\| = \|p\| = \|p_+\| + \|p_-\| \geq$
 $\geq \|z'_+\| + \|z'_-\| = \|z_+\| + \|z_-\| > \|z\|$

$\Rightarrow \|z\| = \|z_+\| + \|z_-\|.$

- $z_+, z_- \in A_+^*$



3.4 GNS αναπαράσταση

Ορ6. Μια αναπαράσταση C^* -άλγεβρας A είναι ένας H -μορφισμός $\varphi: A \rightarrow B(H)$ σε χώρο Hilbert! Λέμε ότι η φ είναι πίστη αν $\ker \varphi = \{0\}$.

Πρτρ: Αν $(\varphi_\lambda: A \rightarrow B(H_\lambda))_\lambda$ είναι οικογένεια αναπαράξεων τότε η απεικόνιση:

$$\bigoplus_\lambda \varphi_\lambda: A \longrightarrow B\left(\bigoplus_\lambda H_\lambda\right): a \longmapsto \bigoplus_\lambda \varphi_\lambda(a)$$

ή $\left(\bigoplus_\lambda \varphi_\lambda(a)\right) \begin{pmatrix} x_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\lambda(a)x_\lambda \end{pmatrix}$, είναι το ευθύ άθροισμα της οικογένειας. Είναι οντως αναπαράσταση της A . Είναι πίστη αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ ε.ω. $\varphi_\lambda(a) \neq 0$.

Σχόλιο. Υποθυμίζουμε ότι αν H είναι χώρος γινόμενου τότε η πλήρωση του είναι χώρος Hilbert.

Κατασκευή:

Έστω τ θετικό αναπαραστάση της A . Θέτουμε

$$N_\tau := \{a \in A \mid \tau(a^*a) = 0\}$$

$$\underline{\underline{3.3.7}} \quad \{a \in A \mid \tau(ba) = 0\}$$

Επομένως N_Z είναι κλειστό οπιοτερό δε-
 ωτος της A , και η αντιστοιχία:

$$A/N_Z \times A/N_Z \rightarrow \mathbb{C}: (a+N_Z, b+N_Z) \mapsto \tau(b^*a)$$

είναι κατά ορισμό και εσωτερικά γινόμενο
 στον A/N_Z . Τράφουμε $\| \cdot \|_Z$ για την πλίνωση.

Για $a \in A$ ορίζουμε $\varphi(a): A/N_Z \rightarrow A/N_Z$ τέω

$$\varphi(a)(b+N_Z) = ab + N_Z$$

Είναι κατά ορισμό $\| \varphi(a) \| \leq \| a \|$ από:

$$\begin{aligned} \| \varphi(a)(b+N_Z) \|^2 &= \tau(b^* a^* a b) \leq \| a^* a \| \tau(b^* b) \\ &= \| a \|^2 \| b+N_Z \|^2. \end{aligned}$$

Άρα έχω μοναδική επέκταση σε $\varphi_z(a) \in B(H_Z)$.

Τώρα από τον τρόπο που ορίστηκε, η αντιστοιχία

$$\varphi_z: A \longrightarrow B(H_Z): a \longmapsto \varphi_z(a)$$

είναι $*$ -homomorfικός στην A . Δεν καθορίζει
 η Gelfand-Neimark-Segal αναπαράσταση
 του τ .

Πρβ: Για $A \neq \{0\}$ καλούμε την $\bigoplus_{\tau \in S(A)} \varphi_z$ την
καθολική αναπαράσταση της A .

Επομένως $\varphi(a) = \varphi(b^*b) \stackrel{ii}{=} a = b^*b$.

2) Ορίζουμε $M_n(A) = \{ [a_{ij}] : a_{ij} \in A \}$ με πράξεις όπως στους πίνακες και ορίζουμε

$$([a_{ij}])_{ij}^* = [a_{ji}^*]_{ij}$$

Αν $\varphi: A \rightarrow B$ $*$ -μορφοισμός γραμμικό

$$\varphi^{(n)}: M_n(A) \rightarrow M_n(B) : [a_{ij}] \mapsto [\varphi(a_{ij})]$$

Τότε ο $\varphi^{(n)}$ είναι επίσης $*$ -μορφοισμός

Για H χώρο Hilbert γραμμικό

$$H^{(n)} = \{ (x_i)_{i=1}^n : x_i \in H \}$$

με το αναγόμενο εσωτερικό γινόμενο.

Για $u \in M_n(B(H))$ ορίζουμε $\varphi^{(n)}(u) \in B(H^{(n)})$

π.χ.:

$$\varphi^{(n)}(u) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \varphi(u_{1j}) x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \varphi(u_{nj}) x_j \end{pmatrix}.$$

για $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H^{(n)}$.

Τότε η αντιστοιχία:

$$\varphi^{(n)}: M_n(B(H)) \rightarrow B(H^{(n)})$$

είναι 1-1, επί και $*$ -μορφοισμός $*$ -Αλγεβρών.

Χρησιμοποιούμε την $\varphi^{(n)}$ για να ορίσουμε νόρμα στην $M_n(B(H))$ ή έστω:

$$\|u\| := \|\varphi(u)\|_{B(H^{(n)})}$$

Πρτρ. Από αλγήβρας έχουμε:

$$\|u_{ij}\| = \|\varphi(u)\| \equiv \|u\| \leq \sum_{k,l=1}^n \|u_{k,l}\|$$

για κάθε $u \in M_n(B(H))$.

Θεώρημα. Αν A είναι C^* -άλγεβρα τότε η $M_n(A)$ δέχεται μοναδική νόρμα ως προς την οποία είναι C^* -άλγεβρα.

Απόδ. Έστω $\varphi: A \rightarrow B(A)$ η κανονική αναπαράσταση. Τότε ο $\ast$ -homomorphism

$$\varphi^{(n)}: M_n(A) \rightarrow M_n(B(H))$$

δίνει $\ast$ - $\ast$ και ορίζουμε νόρμα στην $M_n(A)$ ή έστω ως $M_n(B(H))$ (σημειώνοντας $B(H^{(n)})$).

Τότε η $M_n(A)$ είναι κλειστή υποάλγεβρα της $M_n(B(H))$. Η μοναδικότητα έρχεται από 2.1.2.

Σημείωση. Τώρα έχουμε για $a \in M_n(A)$:

$$\|a_{ij}\| \leq \|a\| \equiv \|\varphi^{(n)}(a)\| \leq \sum_{k,l=1}^n \|a_{k,l}\|.$$