

Κεφάλαιο 2. C^* -άλγεβρες και τελεστές και στον χώρο Hilbert

Κύρια έννοιες

- C^* -άλγεβρες
- Θεώρημα Gelfand
- Θεωρία στοιχείων C^* -άλγεβρας
- C^* -άλγεβρες και χώροι Hilbert
- Φασμωτικές Θεωρίες

2.1 $\ast$ -ιδιότητες

Βασικοί ορισμοί:

στα παρακάτω A είναι ιδιότητες

- Εξιδίφης $\ast: A \rightarrow A: a \mapsto a^\ast$ είναι μια αντιστροφή εω: (1) $(a^\ast)^\ast = a \quad \forall a \in A$
(2) $(a^\ast)^\ast = a \quad \forall a \in A$
(3) $(ab)^\ast = b^\ast a^\ast \quad \forall a, b \in A$

Το ζεύγος $(A, \ast)$ καλείται $\ast$ -ιδιότητα.

Για $S \subseteq A$ συμπληρωμένο $S^\ast = \{a^\ast \mid a \in S\}$

Το S καλείται αυτοσυμπληρωμένο αν $S^\ast = S$.

- Μια αυτοσυμπληρωμένη υποιδιότητα $B \subseteq A$ καλείται $\ast$ -υποιδιότητα

Σημ: Εφόσον η εστία $\ast$ -υποιδιοτήτων είναι $\ast$ -υποιδιότητα, για κάθε $S \subseteq A$ υπάρχει η μικρότερη $\ast$ -υποιδιότητα που περιέχει την S και θα λέγαμε ότι είναι η $\ast$ -υποιδιότητα που παράγεται από το S .

• Αν $I \subseteq A$ είναι αυτοσυζυγής διάνομος ιδανικό τότε το υπόλοιπο A/I είναι $*$ -ιδανικό και ισχύει $(a+I)^* = a^* + I$ $\forall a \in A$ (γιατί

• Έστω $\tilde{A}$ η φανερόνομη των $*$ -ιδανικών. Τότε διακρίνει τον ανάλυση $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$ $\forall$ την οποία έχουμε $*$ -ιδανικό. Η A είναι τότε αυτοσυζυγής διάνομος ιδανικό του $\tilde{A}$.

• Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται αυτοσυζυγής ή ερμιτιανό αν $a^* = a$.

π.χ. τα στοιχεία $\frac{a+a^*}{2}$, $\frac{a-a^*}{2i}$ είναι αυτοσυζυγή όπως είναι και τα a^*a , aa^* .

• Για $a \in A$ γράφουμε αποσπαστικά τον αλγόριθμο αυτοσυζυγών:

$$a = \frac{a+a^*}{2} + i \left(\frac{a-a^*}{2i} \right).$$

• Γράφουμε $A_{sa} = \{ a \in A \mid a = a^* \}$.

• Ένα στοιχείο $a \in A$ καλείται κανονικό αν $a^*a = aa^*$.

• Η $\ast$ -άλγεβρα που παράγεται από ένα πεπλεγμένο στοιχείο είναι αβελιανή, και συνιστάει στην ουσία το γινόμενο εσωτερικών των προτύπων: $a^n (a^\ast)^n$, $n, n \in \mathbb{N}$

• Ένα στοιχείο $p \in A$ καλείται πρόβολο αν: $p = p^\ast = p^2$.

• Αν $1 \in A$ έχει μονάδα 1 τότε: $1^\ast = 1$ (φυσικά)

• Αν $a \in \text{Inv}(A)$ τότε $(a^\ast)^{-1} = (a^{-1})^\ast$

Επομένως: $\text{ker}(a^\ast) = \text{ker}(a)^\ast := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \text{ker}(a) \}$
(φυσικά) $\forall a \in A$

• Ένα στοιχείο $u \in A$ καλείται ορθογώνιο αν: $u^\ast u = uu^\ast = 1$.

• Αν $u^\ast u = 1$ τότε το u καλείται ισοφύλο

• Αν $uu^\ast = 1$ τότε το u καλείται συνισοφύλο

• Μια αναγωγή $\phi: A \rightarrow B$ με τιμή $\ast$ -αλγεβρών καλείται $\ast$ -μορφισμός αν: είναι μορφισμός αλγεβρών και $\phi(a^\ast) = \phi(a)^\ast \quad \forall a \in A$

- Ένα $\ast$ -μορφοισμός που είναι 1-1 και αντι-κατεύεται $\ast$ -ισομορφισμός (γιατί η αντίστροφη είναι $\ast$ -μορφοισμός).
- Αν ϕ είναι $\ast$ -μορφοισμός τότε λειτουργεί ως ομομορφισμός δοσμένος και η εικόνα $\phi(A)$ είναι $\ast$ -υπόσύνολο του πεδίου κτύπου.
- Αν $\phi: A \rightarrow A$ είναι $\ast$ -ισομορφισμός τότε ονομάζεται αυτομορφισμός.
- Αν A έχει μονάδα και η $\varepsilon.A$ ορισμο-δίνεται τότε: $Ad_u: A \rightarrow A; a \mapsto uau$ είναι αυτομορφισμός.
Αυτοί οι αυτομορφισμοί καλούνται συζυγικοί.
- Λέμε ότι $a, b \in A$ είναι ορθομοναδ-αίνα ισοδύναμα αν υπάρχει ορθομοναδισμός u με $a = uau$.
(αρκεί είναι σχέση ισοδυναμίας και $\varepsilon(a) = \varepsilon(b)$.)

Οπρ: Μια *-ιδιοτετα Α καλείται Banach αν είναι ιδιοτετα Banach ως προς νόρμα $\| \cdot \|$ ε.ω. $\| a^* \| = \| a \| \quad \forall a \in A$.

Αν ανιχνόσθ $u \in A$ έτσι πουάδα τότε $\| u \| = 1$ τότε $u \in A$ καλείται πουάδισια *-ιδιοτετα Banach.

Οπρ: Μια *-ιδιοτετα Banach καλείται C^* -ιδιοτετα αν: $\| a^* a \| = \| a \|^2 \quad \forall a \in A$.

Πρρ: Κάθε υδαοισι *-υνιδιοτετα πια C^* -ιδιοτετασ αθου C^* -ιδιοτετα και θα κα-
δαίρει C^* -υνιδιοτετα.

Πρρ: Αν πια C^* -ιδιοτετα έτσι πουάδα $\pm$ τότε αυταοίως $\| \pm \| = 1$. (γιατί;)

Οποίως $\| p \| = 1$ για υυολοθις p .

Πρρ: Αν $u \in A$ ορδοπουαλ-υις, A : C^* -ιδιοτετα τότε: $\| u \| = 1$ και $\sigma(u) \subseteq \pi$ (γιατί;)

2.1.1 Prop: $A = \mathbb{C}$

2.1.2 Prop: $A = C(\Omega)$ to $f^*(w) := \overline{f(w)}$

Οπως οι: $l^\infty(S)$ Σύνολο

στην $L^\infty(\mu, \tau)$ (μ, τ) χώρος μέτρησης

C^* -αλγεβρα

$C_0(\Omega)$ Ω τοπολογικός χώρος

$B_\infty(\Omega)$ Ω χώρος μέτρησης

2.1.3 Prop: $A = M_n(\mathbb{C}) \equiv B(\mathbb{C}^n)$

Πιο γενικά $A = B(H)$ για H χώρο Hilbert

2.1.4 Prop: Αν $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ οικογένεια C^* -αλγεβρών

τότε $\bigoplus_{\lambda} A_\lambda = \{ (a_\lambda)_\lambda : a_\lambda \in A_\lambda, \sup \|a_\lambda\| < \infty \}$

στην C^* -αλγεβρα με ως βάση συζυγισμό

συνήθως τότε: $\| (a_\lambda)_\lambda \| = \sup \|a_\lambda\|$

$\bigoplus_{\lambda}^{\infty} A_\lambda = \{ (a_\lambda)_\lambda \in \bigoplus_{\lambda} A_\lambda \mid \forall \varepsilon > 0 \exists F \subseteq \Lambda \text{ περ } \varepsilon. \omega. \}$
 $\|a_\lambda\| < \varepsilon \quad \forall \lambda \notin F$

είναι αυτοσυζυγή σύνολο

(γιατί)

2.1.5 Prop. 'Gow $\Omega \neq \emptyset$ bei A C^* -algebra.
 Dann $l^\infty(\Omega, A)$ eine C^* -algebra ist als
 eine universelle Eigenschaft.

An Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum
 sei $f \in l^\infty(\Omega, A)$ definiert so
 dass es $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt $\{ \omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \delta \}$
 eine endliche Menge. (Satz $f \in C_0(\Omega, A)$).
 Dann $C_0(\Omega, A)$ eine C^* -algebra von
 $l^\infty(\Omega, A)$.

2.1.1 Def. 'Gow $a \in A$, A C^* -algebra. Dann
 $r(a) = \|a\|$.

Lemma: 'Gow $\|a^n\| = \|a\|^n$ bei $n \in \mathbb{N}$ und $\|a\| = \|a^*\|$
 für $n \in \mathbb{N}$. Bew.

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a\|^n)^{1/n} = \|a\|.$$

2.1.2 Prop. An $(A, \|\cdot\|_1)$ sei $(A, \|\cdot\|_2)$ eine
 C^* -algebra sei es für die zwei Normen wie
 $\|a\|_1 = \|a\|_2 \quad \forall a \in A$.

Beweis: $\|a\|_1 = r(a)^2 = \|a\|_2 \quad \forall a \in A$ $\square$

Satz: $(A, \|\cdot\|_i)$ für $i = 1, 2$.

2.1.3 Lemma: Soit A $\ast$ -algèbre Banach
 e.v. $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \quad \forall a \in A$. Soit A une C^* -algèbre
triv: $\|a^*a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\| = \|a\|^2 \leq \|a^*a\| \quad \forall a \in A$
 équiv. à C^* -norme usuelle. $\square$

Théorème: Il existe une unique algèbre $U(A)$
 sur C^* -algèbre A .

- Soit A C^* -algèbre
- Soit $L, R \in B(A)$ tels qu'ils soient (L, R)
 une double centralizer de:

$$L(ab) = L(a)b$$

$$R(ab) = aR(b) \quad \forall a, b \in A.$$

$$\text{car } R(a)b = aL(b)$$

= Proposer pour $c \in A$ opérateurs $L_c, R_c \in B(A)$
 tels que: $L_c(a) = ca$ et $R_c(a) = ac \quad \forall a \in A$.
 Alors (L_c, R_c) est une double centralizer

$$\text{et} \quad \|c\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|ca\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|ac\|$$

$$\text{car équiv.} \quad \|L_c\| = \|c\| = \|R_c\|.$$

2.1.4 lemma. Soit A C^* -algèbre her. Soit $L, R \in B(A)$. Alors (L, R) est une double centraliser équilibrée : $\|L\| = \|R\|$

Ans. évident.

Def. $\mathcal{K}(A) = \{ (L, R) \mid (L, R) \text{ double cent. } \text{ sur } A \}$

• Pour $(L, R) \in \mathcal{K}(A)$ on définit $\|(L, R)\|_{\mathcal{K}(A)} = \|L\| = \|R\|$.

• $\mathcal{K}(A)$ est une sous-algèbre unitaire sur $B(A) \oplus B(A)$ qui donne algèbre

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1).$$

(pour i, j).

• Pour $T \in B(A)$ on définit $T^* = (T|_{A^*})^*$.

Soit π l'application $T \mapsto T^*$ est une isométrie surjective unitaire sur $B(A)$ s.t. $T^{**} = T$,
 et $(TS)^* = S^* T^*$.

Pour $(L, R) \in \mathcal{K}(A)$ on définit $(L, R)^* = (L^*, R^*)$.

Soit π sur $(\mathcal{K}(A), *)$ est une $*$ -algèbre (pour i, j)

2.1.5 Def. Αν n A είναι C^* -ιδιόμορφα τότε n $M(A)$ είναι C^* -ιδιόμορφα (το τους θεωρούμε ορισμένο).

Αντ. C^* -ιδιότητα + ιδιότητα (έκταση). $\square$

Def. Η $M(A)$ καλείται πρόταση αν είναι ιδιόμορφα ως A .

Prop. Η ανακάλυψη $A \rightarrow M(A): a \mapsto (L_a, R_a)$ είναι ισομορφισμός $*$ -homomorphism, που n ορίζεται ως είναι ισόμορφος με $M(A)$.

Επίσης n $M(A)$ είναι πρωτεύον με πύλη δ_a ως (id_A, id_A) .

Εξάρα: $A = M(A) \iff A$ είναι πρωτεύον.
(μνήμη)

Σημ. Δεν ονομάζονται "πρωτεύον" πρωτεύοντες ως A .

Σημ. Γίνεται ότι n $\hat{A}$ δίνεται για να είναι το n $M(A)$, αλλά ότι είναι C^* -ιδιόμορφα με την n $M(A)$.

2.1.6 Qpr Έστω A C^* -άλγεβρα. Τότε η $\|\cdot\|_A$

$\tilde{A}$ δένεται νόρμα που ονομάζεται $\|\cdot\|_A$ και η $(\tilde{A}, \|\cdot\|_A)$ είναι C^* -άλγεβρα (και επομένως αυτή η νόρμα είναι μοναδική)

Απόδ (α) Έστω A δαν μονάδα 1_A . Τότε η αντιστοιχία $\phi: \tilde{A} \rightarrow A \oplus \mathbb{C}: (a, \lambda) \mapsto (a + \lambda 1_A, \lambda)$ είναι $*$ -ισομορφισμός και ορίσεται:

$$\|(a, \lambda)\|_{\tilde{A}} := \|\phi(a, \lambda)\|_{A \oplus \mathbb{C}}.$$

(β) Έστω A δαν δεν μονάδα. Έστω 1 η μονάδα στο $M(A)$, τότε $A \cap \mathbb{C}1 = (0)$.

Η αντιστοιχία $\phi: \tilde{A} \rightarrow M(A): (a, \lambda) \mapsto a + \lambda 1$ είναι $*$ -ισομορφισμός επί στο $A + \mathbb{C}1 \subseteq M(A)$ και ορίσεται:

$$\|(a, \lambda)\|_{\tilde{A}} := \|\phi(a, \lambda)\|_{B(A)}. \quad \square$$

Σημ. Στο επίθετο θεωρούμε $\tilde{A}$ με τη νόρμα που την κάνει C^* -άλγεβρα.

Σημ. Ει γινεται η $M(A)$ είναι οπτικά μεγάλωσαν π.χ. αν $A = C_0(\mathbb{R})$ για $\mathbb{R}$ κάποια τυπο χώρο Hausdorff, τότε $M(A) = C_b(\mathbb{R})$ (συνεχ).

Σημ. Αν η $\phi: A \rightarrow B$ είναι $\ast$ -homomorphism τότε
 έχει $\ast$ -αλγεβρών τότε η $\tilde{\phi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ είναι επίσης
 $\ast$ -homomorphism.

2.1.7 Θpt Έστω A $\ast$ -αλγεβρα Banach και B
 $\ast$ -αλγεβρα. Αν $\phi: A \rightarrow B$ είναι $\ast$ -homomorphism
 τότε $\|\phi\| \leq 1$.

Αποδ. Χρειαζόμαστε A, B μονοειδή και
 $\phi(1_A) = 1_B$ (αναφορικά θεωρούμε $\tilde{\phi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$,
 και επί του $\ast$ κέρρα των $\tilde{A}$ (και $B(\ast)$).
 Για $a \in A$ έχουμε $\phi(a) \leq \phi(a a^\ast)$ και άρα:

$$\begin{aligned} \|\phi(a)\|^2 &= \|\phi(a) \phi(a)^\ast\| = \|\phi(a a^\ast)\| = \\ &= r(\phi(a a^\ast)) \leq r(a a^\ast) \leq \|a a^\ast\| \leq \|a\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\phi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall a \in A.$$

□

2.1.8 Θpt Έστω A $\ast$ -αλγεβρα και $\lambda \in \mathbb{C}$
 τότε $\phi(a) \leq \lambda$.

Αποδ. Χρειαζόμαστε A μονοειδή. Τότε είχαμε
 αποφασιστεί να έχουμε $\phi(e^{i\theta}) \leq \tau$.

$$\text{Για } \lambda \in \mathbb{C} \text{ και } b = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a - \lambda)^{n-1} \text{ έχουμε}$$

λογιστέ το αποτέλεσμα;

$$e^{ia} - e^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - 1) e^{i\lambda} = (a-\lambda) b e^{i\lambda}.$$

Εφόσον $ab=ba$ έχουμε: $a-\lambda \notin \text{Inv}(A) \Rightarrow e^{ia} - e^{i\lambda} \notin \text{Inv}(A)$

Αρα $e^{i\lambda} \in \mathcal{T} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. □

2.1.9 Θpt Έστω A C^* -άλγεβρα. Αν $a \in \mathcal{T}$ είναι χαρακτηριστικός της A τότε $z(a^*) = z(a)^*$ fact

Ανσδ. Έστω $a = b + ic$ με $b, c \in A_{sa}$. Τότε

$z(b) \in \sigma(b)$ και $z(c) \in \sigma(c)$, και έστω $z(b), z(c) \in \mathbb{C}$

Επομένως:

$$z(a^*) = z(b) - iz(c) = z(a)^*.$$

□

Πρpt. Έστω A μη τετριμμένη C^* -άλγεβρα. Τότε $\mathcal{R}(A) \neq \emptyset$

Ανσδ: Αν A φανερώθηκε τότε για $a \in A$ έχουμε

$$\{z(a) \mid z \in \mathcal{R}(A)\} = \sigma(a) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{R}(A) \neq \emptyset$$

Αν $A \neq \{0\}$ η φανερώθηκε τότε $\exists 0 \neq a \in A_{sa}$

Εφόσον $\{z(a) \mid z \in \mathcal{R}(A)\} \cup \{0\} = \sigma(a) \neq \emptyset$ και

$r(a) = \|a\| \neq 0$ τότε $\exists z \neq 0$ ε.ω. $|z(a)| = r(a) > 0$

$\Rightarrow z|_A \neq 0$.

Def Stone-Weierstrass: Sei Ω kompakt
 und f, g stetig. Dann ist $f \in C(\Omega)$
 ä. w.: (i) es gilt $f \neq g$ und $\exists f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$
 (ii) für $x \in \Omega$ $\exists f \in A$ mit $f(x) \neq 0$.
 Dann ist A dicht in $C(\Omega)$.

Bem. notwendig

2.1.10 Def (Gelfand) Sei $A \neq \{0\}$ ein kommutativer
 C^* -Ring. Dann ist ϕ ein Gelfand
 $\phi: A \rightarrow C(\Omega(A)) : a \mapsto \hat{a}$

ein isometrischer $*$ -Isomorphismus.

Bem. Es gilt $\|\phi\| \leq 1$ und $\|\phi(a)\| = r(a)$.

Für $z \in \Omega(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi(\hat{a})(z) &= z(\hat{a}) = z(a)^* = \phi(a)^*(z) \\ &\Rightarrow \phi(\hat{a}) = \phi(a)^* \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \|\phi(a)\|^2 &= \|\phi(a a^*)\| = r(a a^*) \\ &= \|a a^*\| = \|a\|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi$ ist isometrisch

Αρα η $\varphi(A)$ είναι:

- κλειστό $\dagger$ -ανάλγητο στο $C(\mathbb{R})$
- συμπίπτει με μηδέν (γιατί;
- $\forall z \in A \exists a \in A$ ε.ω. $\varphi(a)(z) \neq 0$ (γιατί;

Τότε από το Θpt Stone-Weierstrass έπεται
ότι $\varphi(A) = C(\Omega(A))$. $\square$

Σημ. Αν $a \in A$ φασιολογικό, τότε $r(a) = 1$ αλλι. (γιατί;

2.1.11 Θpt. Έστω A μοναδιαία C^* -ανάλγητο και
 $B \subseteq A$ C^* -ανάλγητο τέ $1_A \in B$. Τότε:

$$G_A(b) = G_B(b) \quad \forall b \in B.$$

Αποδ. (1) Έστω $b \in B$ και έπει $b \in A$. Τότε
 $G_A(b) \subseteq \mathbb{R}$ και έπει του έχει πρώτος (μνοποι
να είναι φως ην-συμμετρικό). Αρα από 1.2.8
έπεται $G_A(b) = G_B(b)$.

Ενδεόν $b \in \text{Inv}(A) \iff b \in \text{Inv}(B)$.

(2) Έστω $b \in B$ ε.ω. $b \in \text{Inv}(A)$. Αρα $\exists a \in A$
ε.ω. $ba = ab = 1_A$
Τότε $a^* b^* = b^* a^* = 1_A$ $\Rightarrow b b^* a^* a = 1$

Αρα $b b^* \in \text{Inv}(A)$ και $b b^* \in B$.

Επομένως $b b^* \in \text{Inv}(B)$, έπει $\exists c \in B$ ε.ω.
 $b b^* c = 1_A$.

Τότε: $b^*c = a \quad b \quad b^*c = a \Rightarrow a \in B.$

Επομένως $b \in \text{Inv}(B) \cup \{1\}$

Συνολικά: $\text{Inv}(B) = \text{Inv}(A) \cap B \Rightarrow$
 $G_A(b) = G_B(b) \quad \forall b \in B$ □

Σημ. Αν A παραδίει C^* -ελάχιστη και $a \in A$ με
 τότε είναι επόμενης τάξης, αλλά το αντί-
 στροφο δεν ισχύει.

(αντιπαράδειγμα: 'έστω $u \in B(I^2(\mathbb{Z}))$ ε.ω. $u \neq u^*$
 και έστω $q: B(I^2(\mathbb{Z})) \rightarrow B(I^2(\mathbb{Z}))/K(I^2(\mathbb{Z}))$
 Όπως δεν υπάρχει $c \in (B(I^2(\mathbb{Z})))_{sa}$ ε.ω. $q(c) = u$)

Ανθετί δεν είναι οι επόμενης τάξης δεξί-
 ρότο.

2.1.42 Θη Έστω A παραδίει C^* -ελάχιστη και
 η επόμενης τάξης. Αν $\phi(u) \neq \pi$ τότε $\exists a \in A$ με
 ε.ω. $u = e^{ia}$. (αφ' ου $\|1-u\| < 2$ τότε $\phi(u) \neq \pi$.)

Αντ. Χέιτ υποθέτουμε ότι $-1 \notin \phi(u)$ (αφ' ου αλλιώς
 το u κατ' π , $\pi \in \pi$).

Προσδιορίζουμε για $A = C^*(1, u)$ και χέιτ
 υποθέτουμε ότι A παραδίει.

Εφόσον $-1 \notin \sigma(u)$ τότε ορίζεται η $h: \mathbb{C} \setminus [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$
 με τη σχέση του $h \in C(\mathbb{R}(A))$.

Θεωρούμε τώρα $f = \phi(u)$ για τον $\phi: A \rightarrow C(\mathbb{R}(A))$
 Τότε η $g = h \circ f \in C(\mathbb{R}(A))$ με $e^g = f$.

Εφόσον $|f(w)| = 1 \quad \forall w \in \Omega(A)$ τότε $\operatorname{Re}(g) = 0$
 και άρα $g = ih$ για $h = \bar{h}$ στην $C(\mathbb{R}(A))$.

Θεωρούμε $a := \phi^{-1}(h)$ για το οποίο έχουμε:

- $a \in A_{sa} \quad (\phi(a) = h \in C(\mathbb{R}(A))_{sa})$
- $u = e^{ia} \quad (\phi(u) = e^{ih} = e^{\phi(ia)} = \phi(e^{ia}))$

Για το άλλο βέλος έχουμε:

$$\|1 - u\| = r(1 - u) = \sup \{ |1 - \lambda| \mid \lambda \in \sigma(u) \}$$

Επομένως, αν $\|1 - u\| < 2 \Rightarrow -1 \notin \sigma(u)$ □

Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτήν την παρατήρηση.

Σημ: Έστω Ω, Ω' τοπικά συμπαγείς χώροι Hausdorff,
 με $\theta: \Omega \rightarrow \Omega'$ συνεπής και $\theta^{-1}(x)$ συμπαγής
 για κάθε $x \in \Omega'$. Τότε η αντιστροφή

$$\theta^*: C_0(\Omega') \rightarrow C_0(\Omega): f \mapsto f \circ \theta$$

είναι φανερά ένας $*$ -μορφισμός.

Επίσης θ μορφισμός $\Rightarrow \theta^*$ $*$ -ισομορφισμός.

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ συμφορικοί τότε οφείνται να είναι ισομορφικοί.

Άσκηση: Αν $\phi: A \rightarrow B$ $\ast$ -μορφισμός και 1-1
πομπή C^* -αλγεβρών τότε είναι ισομορφία.

2.1.13 Θpt: Έστω A φανερώσει C^* -αλγεβρά και
 $a \in A$ φανερώσει στοιχείο. Έστω οπότε n
ενάρκεια $Z: \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathbb{C}; \lambda \mapsto \lambda$

Τότε υπάρχει φανερώσει φανερώσει $\ast$ -μορφισμός
 $\phi: \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) \rightarrow A; \lambda \mapsto a$.

Ενδεχόμεν n ϕ είναι ισομορφία και n $\text{Im}(\phi)$
είναι n^* $C^*(1, a) \subseteq A$.

Απόδ.: Έστω $B = C^*(1, a)$ που είναι φανερώσει
και έστω $\psi: B \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{R}(B))$ πομπή Gelfand.

Τότε n ψ είναι $\ast$ -ισομορφισμός και
 $\hat{a}: \mathcal{R}(B) \rightarrow \mathcal{C}(a)$ ομοιομορφισμός.

Επειδή $\hat{a}^t: \mathcal{C}(\mathcal{C}(a)) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{R}(B))$ είναι
 $\ast$ -ισομορφισμός και οπότε

$$\phi: \mathcal{C}(\mathcal{C}(a)) \rightarrow A \quad \phi = \psi^{-1} \circ \hat{a}^t$$

Τότε ϕ είναι ισομορφία, $\ast$ -μορφισμός

και: $\phi(z) = \psi^{-1} \circ \hat{a}^t(z) = \psi^{-1}(\hat{a}) = a$

Ενδεχόμεν n ϕ είναι φανερώσει

-19

Τόδοι από Stone-Weierstrass έχουν ως
 $n \in C(\Omega)$ παράγεται από 1 και z , και
 n απόδειξη είναι απλή.

Θεωρ (Συνεργιστικός Λογισμός) Για $a \in A$
 φασιδόγος σε A C^* -αλγεβρα το ποινδα σε
 δομει ως $\phi: C(\Omega(a)) \rightarrow A$ τον θεωρη
 για το λογιστό του $a \in A$.

και αυτό γιατί:

- αν p ποινδα ως $p(a) = \phi(a)$ (αλγεβρική)
- αν $f \in C(\Omega(a))$ γραφόμενα $f(a) := \phi(f)$

Επίσης για $B = \text{Im } \phi$ δομει $B = C^*(1, a)$

Για $z \in \Omega(B)$ έχουμε $f(z(a)) = z(f(a))$

γιατί οι ποινδαί:

$$f \mapsto f(z(a)) \text{ και } f \mapsto z(f(a))$$

εμφανίζονται για $f=1$ και $f=z$ ως $C(\Omega(a))$

Ομοίως εμφανίζονται για f ποινδαί
 και από $f \in C(\Omega(B))$ μέσω αντιστοίχων

2.1.14 Def (Factorizing Automorphisms)

Given A $\mathcal{C}$ -algebra to factorise over $\mathcal{C}A$
 quotiented structure over A . Given $f \in \mathcal{C}(b(a))$

To be: $\mathcal{C}(f(a)) = f(\mathcal{C}(a))$

Therefore for $g \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(f(a)))$ note
 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Proof. Given $B = \mathcal{C}^*(1, a)$. To be:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f(a)) &= \{z(f(a)) \mid z \in \Omega(B)\} = \\ &= \{f(z(a)) \mid z \in \Omega(B)\} = f(\mathcal{C}(a)). \end{aligned}$$

Given $C = \mathcal{C}^*(1, f(a))$. To be $C \subseteq B$ then
 on $z \in \Omega(B)$ note $z|_C \in \Omega(C)$. Also:

$$\begin{aligned} z((g \circ f)(a)) &= (g \circ f)(z(a)) = g(f(z(a))) \\ &= g(f(z|_C(a))) = g(z|_C(f(a))) = \\ &= z|_C(g(f(a))) = z(g(f(a))) \end{aligned}$$

$\forall z \in \Omega(B)$

$$\Rightarrow \bigwedge g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ for } \wedge: B \rightarrow \mathcal{C}(\Omega(B))$$

$$\stackrel{+}{\Rightarrow} g \circ f(a) = g(f(a)). \quad \square$$

2.1.45 Def. Έστω Ω οποιονδήποτε χώρο Hausdorff.
 Για $w \in \Omega$ ορίζουμε $\delta_w : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} ; \delta_w(f) = f(w)$.
 Τότε η αντιστοιχία $\Omega \rightarrow \mathcal{L}(C(\Omega)) : w \mapsto \delta_w$
 είναι ομομορφισμός.

Αποδ. Συνέχεια: Έστω $(w_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ με $w_\lambda \rightarrow w$. Τότε

$$f(w_\lambda) \rightarrow f(w) \quad \forall f \in C(\Omega) \Rightarrow \delta_{w_\lambda} \xrightarrow{w} \delta_w$$

1-1: Έστω $w, w' \in \Omega$ με $w \neq w'$. Τότε από Λήμμα Urysohn
 υπάρχει $f \in C(\Omega)$ ε.ω. $f(w) = 0$ και $f(w') = 1$ και
 άρα $\delta_w \neq \delta_{w'}$.

ον1: Έστω $z \in \mathcal{L}(C(\Omega))$. Τότε $M = \ker z$ είναι
 γνήσια C^* -υπόδιαδομή της $C(\Omega)$. Επομένως η δ_z
 διαχωρίζει το Ω : για $w \neq w'$ υπάρχει $f \in C(\Omega)$
 ε.ω. $f(w) \neq f(w')$ και άρα $z = f - z(f) \in \ker z$
 με $z(w) \neq z(w')$.

Αρα από Θεώρ. Stone-Weierstrass πρέπει να υ-
 πάρχει $w \in \Omega$ ε.ω. $f(w) = 0 \quad \forall f \in M$. Επομένως
 $(f - z(f)) \in \ker z \Rightarrow (f - z(f))(w) = 0 \Rightarrow z(f) = f(w)$
 Συνεπώς $z = \delta_w$.

Αρα η αντιστοιχία είναι βιομόρφη, 1-1, οπότε μπορεί
 οποιονδήποτε χώρο Hausdorff να έχει βιομόρφη
 αντίστοιχη (γιατί;). □

2.2 Θεωρία Συνολικά C*-άλγεβρων

2.2.1 Λήμμα: Έστω Ω τοπικά κλειστό χώρος
Hausdorff. Τότε:

(i) $f \in C_0(\Omega)$ αν $f(\omega) = \overline{f(\omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$.

(ii) Ορίζουμε $f \leq g$ αν $f(\omega) \leq g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$.

Λέτε ότι f θετική αν $f \geq 0$. Τότε:

$f \geq 0$ αν $\exists g \in C_0(\Omega)$ ε.μ. $f = g^*g$ (γιατί),

Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται $\sqrt{f}$ ως φπ:

$$\sqrt{f}(\omega) := \sqrt{f(\omega)}$$

Λήμμα: (1) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

αν $\|f - t\|_\infty \leq t$ τότε f θετική;

(2) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

αν $f \geq 0$ τότε $\|f - t\|_\infty \leq t$.

Πρτρ: Έστω A μοναδιαία C*-άλγεβρα και B
υπόαλγεβρα ώστε $B + \mathbb{C}1_A = A$. Τότε:

$$\sigma_A(b) \cup \{0\} = \sigma_B(b) \cup \{0\} \quad \forall b \in B.$$

Ανάλ: (i) Αν $1_A \in B$ τότε $B = A$ προφανώς.

(ii) Αν B μη-μοναδιαία τότε n αντιστοιχία

$$\tilde{B} \rightarrow A : (b, \lambda) \mapsto b + \lambda 1_A$$

είναι ισομορφισμός.

Εφόσον οι ισομορφισμοί διατηρούν το γινόμενο
είναι αληθές ότι:

(iii) Αν B έχει μονάδα $e \neq 1_A$ τότε: $\forall b \in B$ και
 $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε έχουμε ότι: $b + \lambda \in \text{Inv}(A) \Leftrightarrow b + \lambda e \in \text{Inv}(B)$
και άρα $\phi_A(b) \cup \{0\} = \phi_B(b) \cup \{0\}$.

Γνωρίζουμε αν $B \subset A$ -υπόδαλμα ως A τότε
 $\phi_A(b) \cup \{0\} = \phi_B(b) \cup \{0\}$. $\forall b \in B$.

Οπ6. Έστω $A \subset A$ -υπόδαλμα. Λέμε ότι $a \in A$ είναι
θετικό αν: (i) $a = a^*$
(ii) $\phi(a) \in \mathbb{R}^+$

Γράφουμε A^+ για το σύνολο των θετικών στοιχείων
στην A .

Από 1η πρ έχουμε ότι $B^+ = A^+ \cap B$, για
 $B \subset A$ -υπόδαλμα ως A .

Σημ6. Έστω $S \neq \emptyset$ τότε $f \in \mathcal{L}^0(S)$ είναι θετικό
αν $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$ (γιατί $\phi(f) = \overline{f(S)}$).

Άρα ο παραπάνω ορισμός συνεπάγεται αυτόν
των θετικών συναρτήσεων σε $\mathcal{C}(R)$ για
η οποία φέρει χώρο Hausdorff.

22.1 Qpt. Έστω A C^* -άλγεβρα και $a \in A^+$.
Τότε υπάρχει μοναδικό $b \in A^+$ ε.ω. $a = b^2$.

Αποδ. Υπάρχει: Από Qpt Gelfand έχουμε ότι
 $C^*(a) \cong C(\Omega(C^*(a)))$ ($a = a^*$ άρα $C^*(a)$ for
 Θεωρούμε ότι $\varphi(a)$ το οποίο $a \geq 0$
 και άρα για $b = \varphi^{-1}(\varphi(a)^{1/2})$ έχουμε ότι
 $b^2 = \varphi^{-1}(\varphi(a)^{1/2})^2 = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a$.

Μοναδικότητα: Έστω $c \in A^+$ ε.ω. $c^2 = a$.
 Εφόσον $ca = ac$ και $b \in C^*(a)$ τότε $cb = bc$
 (Θυμίζουμε ότι $C^*(a)$ είναι η ελάχιστη θύλακα των πολλαπλών στο $a \in A$.)

Έστω $B = C^*(b, c)$ που είναι φραδισμένη
 C^* -υιάλγεβρα της A και θεωρούμε:

$$\varphi': B \longrightarrow C(\Omega(B))$$

$$\text{Τότε } \varphi'(b)^2 = \varphi'(c)^2 \text{ και άρα } \varphi'(b) = \varphi'(c)$$

$$L = \varphi'(a)$$

Διότι μοναδικότητα $\sqrt{}$ σε χώρους Banach.

$$\text{Επομένως } b = (\varphi')^{-1}(\varphi'(b)) = (\varphi')^{-1}(\varphi'(c)) = c.$$

(αν $a \in C^*(b, c)$)

□

Πρ. 2.1, Για $a \in A^+$ γραφόμενο $a^{1/2}$ με το μοναδικό στοιχείο $b \in A$ ε.ω. $b^2 = a$.

Για $a \in A_{sa}$ γράφονται:

$$|a| = (a^2)^{1/2} \quad a_+ = \frac{1}{2}(|a| + a) \quad a_- = \frac{1}{2}(|a| - a)$$

Τότε $|a|, a_+, a_- \in A_+$ και $a = a_+ - a_-$ με $a_+ a_- = 0$. Αυτά γράφει είναι μοναδικά και προέρχουν από τον τετραγωνισμό στο Gelfand όρου $f = f_+ - f_-$ σε χώρο συνεχίσεων με $f_+ = \max \{f, 0\}$ $f_- = \max \{-f, 0\}$.

2.2.2 Σημείωση. Έστω $a \in A_{sa}$ με $\|a\| \leq 1$. Αποδεικνύεται

Τότε $1 - a^2 \in A_+$ (γιατί; μετ(α) στο Gelfand;)
και τα στοιχεία

$$u = a + i\sqrt{1 - a^2} \quad \text{και} \quad v = a - i\sqrt{1 - a^2}$$

είναι ορθογώνια στοιχεία με $a = \frac{1}{2}(u + v)$

Επομένως τα ορθογώνια στοιχεία u, v είναι στοιχεία της μοναδικής C^* -αλγεβρας A παράγουν γραμμένα την A .

2.2.2 Λήμμα Έστω A φανερώσει C^* -άλγεβρα
και $a \in A$, $t \in \mathbb{R}$.

- (i) Αν $\|a - t\| \leq t$, τότε $a \geq 0$
- (ii) Αν $\|a\| \leq t$ και $a \geq 0$, τότε $\|a - t\| \leq t$.

Απόδ Αρκεί να θεωρήσουμε $A = C^*(1, a)$
και να δείξουμε ότι ενώ ισχύει σε χώρο
συναρτήσεων $C(\mathbb{D})$ για $a = z$.
 $\hookrightarrow t \in \mathbb{R}$.

Πρτ Έστω ότι $A^+ \subseteq A$ κλειστός χώρος
(γιατί).

2.2.3 Λήμμα. Αν $a, b \in A^+$ τότε $a + b \in A^+$.

Απόδ Χρησιμοποιούμε ότι A φανερώσει.
Από Λήμμα έχουμε ότι:

$$\|a - \|a\|\| \leq \|a\| \text{ και } \|b - \|b\|\| \leq \|b\|$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \|a + b - (\|a\| + \|b\|)\| &\leq \|a - \|a\|\| + \|b - \|b\|\| \\ &\leq \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

Αρα $a + b \geq 0$ από 2.2.2 Λήμμα. □

2.24 Op+. Έστω A C^* -αλγεβρα. Τότε: α. A^+
 $a \in A^+ \implies \exists b \in A$ ε.ω. $a = b^*b$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) Προκύπτει από το (α) Gelfand (γιατί)

($\Leftarrow$) $\exists b \in A$ ε.ω. $a = b^*b$.

Πρώτη Σκέψη: το ότι αν $-a^*a \in A^+$ τότε $a=0$:

Εφόσον $b(-aa^*) \in \{0\} = b(-a^*a) \in \{0\}$ από 1.2 δ
έχουμε ότι $-aa^* \in A^+$, πράγματος
... $a = b + ic$ για $b, c \in A$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } a^*a + aa^* &= 2b^2 + 2c^2 \implies \\ &\implies a^*a = 2b^2 + 2c^2 - aa^* \in A^+ \end{aligned}$$

Αρα $b(a^*a) \in \mathbb{R}^+ \cap (-\mathbb{R}^+) = \{0\}$ και άρα
 $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0 \implies a=0$

Τώρα έστω $a \in A$ οχαιό και έδο $a^*a \in A^+$.

Θεωρούς $b := a^*a \in A$ και γράγουμε:
 $b = b_+ - b_-$ με $b_+ b_- = 0$

Για $c := ab_-$ έχουμε:
 $-c^*c = -b_- a^*a b_- = -b_+ (b_+ - b_-) b_- = +b_-^3$

Οπώς $b_- \in A^+ \implies b_-^3 \in A^+$ (γιατί)

Αρα $-c^*c \in A^+ \implies c=0$ και άρα $b_- = 0$

Επομένως $b_- = 0$ (γιατί) και άρα:
 $a^*a \equiv b = b_+ \in A^+$ □

-4

Thm. Σε A ορίζουμε $a \leq b$ αν $b - a \in A_+$
 Εvidently ότι αν $a \leq b$ τότε $a + c \leq b + c \ \forall c$
 Επίσης αν $a \leq b$ τότε $ta \leq tb \ \forall t \in \mathbb{R}^+$
 και αν $a \leq b$ τότε $-b \leq -a$.

Για $a \in A$ ορίζουμε $|a| := (a^*a)^{1/2}$

2.2.5 Def. Έστω A C^* -άλγεβρα.

(1) $A^+ = \{ a^*a \mid a \in A \}$

(2) Αν $a, b \in A$ και $c \in A$ τότε:

$$a \leq b \implies c^*ac \leq c^*bc.$$

(3) Αν $0 \leq a \leq b$ τότε $\|a\| \leq \|b\|$.

(4) Αν A μοναδιαία και $a, b \in \text{Inv}(A) \cap A^+$

$$\text{τότε: } a \leq b \implies 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}.$$

Απόδ: (1) και (2) αμερόνυμα.

(3) Χρ/γ A μοναδιαία. Τότε στο περ/αίο
 Gelfand έχουμε $b \leq \|b\| \cdot 1$. Άρα:

$$a \leq b \leq \|b\| \cdot 1 \implies a \leq \|b\| \cdot 1 \quad (\text{γιατί})$$

Από περ/αίο Gelfand στο $C^*(1, a)$ έχουμε

$$\text{τιμή: } a \leq \|b\| \cdot 1 \implies \|a\| \leq \|b\|.$$

(4) Αν $c \geq 1$ τότε $c \in \text{Inv}(A)$ (και περ/αίο
 Gelfand) οπότε $C^*(1, c)$.

-8-

Toze: $a \leq b \Rightarrow 1 = a^{1/2} a a^{1/2} \leq a^{1/2} b a^{1/2}$
 $\Rightarrow (a^{1/2} b a^{1/2})^{-1} \leq 1 \Rightarrow a^{1/2} b^{-1} a^{1/2} \leq 1$
 $\Rightarrow b^{-1} \leq a^{1/2} 1 a^{1/2} = a$ □

2.2.6 Qpt : Given $a, b \in A^+$, A C^* -algebra.

Toze: $a \leq b \Rightarrow a^{1/2} \leq b^{1/2}$

Ans. Apotei vdo $a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$.

X Bey Dwpoupe ou $n \in A$ exen pouda.

Given $c = \operatorname{Re}((t+b+a)(t+b-a)) = \frac{(\dots) + (\dots)^2}{2}$

$$d = \operatorname{Im}((t+b+a)(t+b-a)) = \frac{(\dots) - (\dots)^2}{2i}$$

Toze:

$$c = \frac{1}{2} \left((t+b+a)(t+b-a) + (t+b+a)(t+b-a) \right)$$

$$= t^2 + 2tb + \underbrace{b^2 - a^2}_{\in A^+} \geq 0$$

$$\Rightarrow c \in \operatorname{Inv}(A) \cap A^+.$$

Given: $c^{-1/2} (c+id) c^{-1/2} = 1 + i c^{-1/2} d c^{-1/2}$

$$\Rightarrow c+id \in \operatorname{Inv}(A). \quad \begin{matrix} \in \operatorname{Inv}(A) \\ \text{(given)} \end{matrix}$$

Given: $t+b-a$ given ap. 6zge aut/to
 der ape aut/to jazi given autozefyos.

Apote $-t \notin \mathcal{G}(b-a) \Rightarrow \mathcal{G}(b-a) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

$$\Rightarrow b-a \geq 0 \Rightarrow a \leq b. \quad \square$$

Σημείωση. Δείχνει ότι $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$. -9

Για να δείξουμε ότι M_2 το επιδιώκει + να το γράψουμε:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και είναι γυρομετρικά. Τότε:

$$p \leq p + q$$

$$\text{Οπότε: } p^2 = p \neq (p+q)^2 = p + q + pq + qp$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι ιδιοτεταγμένο

Οπότε αν A ηθεώρηται τότε: $0 \leq a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$
(γιατί)

Άσκηση. Δείξτε ότι:

(i) $a \in M_2$; $a \geq 0 \Rightarrow \text{tr}(a) \geq 0$ $\det(a) \geq 0$.

(ii) $a \in M_n$; $a \geq 0 \Rightarrow$ Είναι αυτοσυζυγές
το μ η απεικόνιση
ιδιοτεταγμένη.

(iii) $a \in (M_n)_{\mathbb{R}}$; $a \geq 0 \Leftrightarrow a = b^* b$ για $b \in M_n$
 $\Leftrightarrow a^* a \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}^n$.

(iv) Νόσο το (iii) δεν ισχύει αν $a \neq a^*$!

2.3 Τόδοις ος χώροι Hilbert με μ.δ. γραμμικόν πορφο

Ορ6. Ένας χώρος Hilbert H δίνον ένας Γ-γραμ-
μικόν χώρο ορισμένον με εσωτερικόν γινώ-
μονο:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

ε.ω :

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ με $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H$

(3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(με άρα $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ γαρι)

(4) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

(με άρα $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$ γαρι)

τεν ο χώρος H ορισμένον με:

$$\| \cdot \|_H : H \rightarrow \mathbb{R}_+; \quad \|x\|_H := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

δίνον χώρο Banach.

(γαρι $\| \cdot \|_H$ είναι νορμα;).

Ορ7: Γράφοντε $B(H_1, H_2) = \{ T: H_1 \rightarrow H_2 \mid T \text{ γραμμ.} \}$
γραμμικόν

Γράφοντε $B(H) = B(H, H)$.

Υπόδειξη: ο χώρος $B(H_1, H_2)$ είναι γραμμικός
χώρος με νόρμα:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Tx\|_{H_2} = \sup_{\|x\|_{H_1} = 1} \|Tx\|_{H_2}$$

$$= \inf \{ M > 0 : \|Tx\|_{H_2} \leq M \|x\|_{H_1} \}$$

και επειδή $T \in B(H_1, H_2)$ είναι συνεχής.

Εφόσον ο H_2 είναι χώρος Banach έχουμε ότι ο
 $B(H_1, H_2)$ είναι χώρος Banach.

Def (αναπαράσταση Riesz-Frechet): Έστω H χώρος
Hilbert και $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής γρ. αναπαράσταση.
Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ π.ω. $f(x) = \langle x, y \rangle$.
 $\forall x \in H$

Απόδ. Έστω $M = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ που είναι κλειστός
υπόχωρος του H (γιατί;)

- Αν $M = H$ τότε $f = 0$ και επιλέγουμε $y = 0$.
- Αν $M \neq H$ τότε $M^\perp = \{y \in H \mid y \perp M\} \neq \emptyset$

λεξυριστός: $\dim M^\perp = 1$.

οπότε: Έστω $y_1, y_2 \in M^\perp$. Τότε $f(y_1) \neq 0$ $f(y_2) \neq 0$
και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ π.ω. $\lambda f(y_1) = f(y_2)$.

Άρα $\lambda y_1 - y_2 \in M$
Επειδή $\lambda y_1 - y_2 \in M^\perp$ $\Rightarrow \lambda y_1 - y_2 = 0$
 $\Rightarrow y_2 = \lambda y_1$ □

-3

Εφαπόμενος $M^\perp = \{y_0 \mid \|y_0\|=1 \text{ Παράμετρος}\}$

$$\langle x - \langle x, y_0 \rangle y_0, y_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle \langle y_0, y_0 \rangle = 0$$

και άρα $x - \langle x, y_0 \rangle y_0 \in (M^\perp)^\perp = M$ (γιατί;)

Εφαπόμενος είναι αυτός.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - \langle x, y_0 \rangle y_0) + f(\langle x, y_0 \rangle y_0) = \\ &= f(y_0) \langle x, y_0 \rangle = \langle x, \overline{f(y_0)} y_0 \rangle. \end{aligned}$$

Συνεπώς $f(x) = \langle x, y \rangle$ για $y = \overline{f(y_0)} y_0$. □

Ερώτηση: Τις απαιτήσεις σου $H \times H$ μετ?

Π.5.2: (1) $H = L^2(I)$ για I εύρος

(2) $L^2(\Omega, t)$ για (Ω, t) χώρο μέτρησης

(3) ότι ως ο $C[0,1]$ με ϵ_0 γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\lambda$$

Σημείωση: Στον $l^2(\mathbb{N})$ επίμετρο

$$l^2_F(\mathbb{N}) = \{ (x_n)_n \mid x_n \neq 0 \text{ για πεπερ. το πολύ } n \}$$

Τότε το εσωτερικό γινόμενο: $f = l^2_F(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f((x_n)) = \sum_n \frac{1}{n} x_n$$

Θεω εμάς να ανήκει στο $l^2_F(\mathbb{N})$ (αλλά στο $l^2/\mathbb{N}$)
(γιατί;).

2.3.1 Def Gezw H_1, H_2 Hilbert.

(1) An $u \in B(H_1, H_2)$ taze unapaxi poudicis $u^* \in B(H_2, H_1)$ etai waze $\langle u x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, u^* x_2 \rangle$ $\forall x_1, x_2 \in H$

(2) H anorkion $u \mapsto u^*$ einu ened. fr, kan $\|u\| = \|u^*\| = \|u^* u\|^{1/2}$

Ans. (1) Gia $x_1 \in H_2$ opifanto:

$$f_{x_2}: H_1 \rightarrow \mathbb{C} : x_1 \mapsto \langle u(x_1), x_2 \rangle.$$

to enoi einu ppegheno swapnoodis. Hpe eno Def Riesz-Frechet unapaxi poudicis $y_2 \in H_2$ s.w. $\langle u(x_1), x_2 \rangle = f_{x_2}(x_1) = \langle x_1, y_2 \rangle$

Opifanto an anorkion $u^*: H_2 \rightarrow H_2 : u^*(x_2) = y_2$. H poudicomeni einu en u^* einu ppeghis. Enindou:

$$\|u^*(x_2)\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1} |\langle u(x_1), x_2 \rangle| \leq \|u\| \|x_2\|$$

Enotious o u^* einu swaxis, $\|u^*\| \leq \|u\|$. $\forall u \in B(H_2, H_1)$

Gia $x_1 \in H_1$ an $\|x_1\| \leq 1$ $\epsilon > 0$ - ϵ :

$$\langle u(x_1), u(x_1) \rangle = \langle x_1, u^* u(x_1) \rangle \leq \|u^* u\|$$

$$\Rightarrow \|u\|^2 = \sup_{\|x_1\| \leq 1} \|u(x_1)\|^2 \leq \|u^* u\| \leq \|u^*\| \|u\| = \|u\|^2$$

Από αυτήν παίρνουμε: $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|u^*\| \|u\|$

και άρα: $\|u\|^2 = \|u^*u\|$ και $\|u\| = \|u^*\|$.

(συμπληρώστε ότι $(Au + u_2)^* = \overline{A}u^* + u_2^*$.) $\square$

Πρτρ. (1) Για $u \in B(H_1, H_2)$ λέμε ότι ο $u^* \in B(H_2, H_1)$ είναι ο συζυγής του. Έχουμε:

$$\ker(u^*) = (\text{im}(u))^{\perp} \quad (\text{im}(u) = u(H_1))$$

$$\text{και } \ker(u)^{\perp} = \overline{\text{im}(u^*)} \quad (\text{γιατί};).$$

2) Για $u \in B(H_1, H_2)$, $v \in B(H_2, H_3)$ έχουμε ότι $(uv)^* = v^*u^*$.

3) Ο χώρος $B(H)$ είναι άρα C^* -άλγεβρα.

4) Γενικότερα για $H = \mathbb{C}^n$ έχουμε $B(H) = M_n(\mathbb{C})$ με συζυγία των τεταγμένων συζυγία πινάκων. (γιατί;)

Άσκηση. Δείξτε ότι για $A \in M_n(\mathbb{C})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \|A^*A\| = \sup \{ |\lambda| : \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A^*A \} \\ &= \sup \{ \lambda : \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A^*A \}. \end{aligned}$$

Υπόθεση Ο χώρος $\mathbb{C}^n$ γίνεται χώρος Hilbert
 ορισμένου $\langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = y^* x$.

Ενας αυτοσυγής πίνακας $B \in M_n(\mathbb{C})$ καλούμε
 δοσείν υπαρκτούς αν $x^* B x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Εφόσον κάθε αυτοσυγής $B = U D U^*$ με U για
 αλληλ. βίαν (ορθομονική) για D διαγώνιο
 που απορρέει από τις ιδιοτιμές του B
 τότε έχουμε: B είναι υπαρκτός αν
 και μόνο αν $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Επίσης ισχύει γενικότερα στον $B(H)$.

Πρόταση. Έστω $u \in B(H)$ με $u^* = u$. Τότε με

$$m = \inf \{ \langle u x, x \rangle \mid \|x\|_H = 1 \} \quad \text{και}$$

$$M = \sup \{ \langle u x, x \rangle \mid \|x\|_H = 1 \}.$$

Τότε: (1) $\sigma(u) \subseteq [m, M]$

(2) $m, M \in \sigma(u)$

(3) $\|u\| = \max \{ |m|, |M| \}$

Γενικότερα έχουμε ο ότι ένας αυτοσυγής $u \in B(H)$
 είναι θετικός εάν $\langle u x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$
 αν $\langle u x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$.

Ans: Gezw $\lambda > M$ Odo $\lambda \notin \sigma(u)$. Exo $\rightarrow$:

$$\langle \lambda x, x \rangle \leq M \|x\|^2 \quad \forall x \in M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \lambda I - u)x, x \rangle \geq (\lambda - M) \|x\|^2 \Rightarrow$$

$\lambda I - u$ ist injective.

Ersetzt man λ durch $\lambda + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) erhält man eine
Kugel um λ die $\lambda \notin \sigma(u)$.

Opertors Eigenwert nur für $\lambda < m$, der $\lambda \in \sigma(u) \subseteq [m, M]$
Wäre Odo $M \in \sigma(u)$ (opertors Eigenwert $m \in \sigma(u)$).

Definiere: $f: H \times H \rightarrow \mathbb{C} \quad f(x, y) = \langle (M - u)x, y \rangle$

Aus einem M -S. f ist positiv definit (wegen $\lambda > M$)
kann man zu Cauchy-Schwarz anwenden:

$$|\langle (M - u)x, y \rangle| = |f(x, y)| \leq f(x, x)^{1/2} f(y, y)^{1/2} \\ = \langle (M - u)x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle (M - u)y, y \rangle^{1/2}$$

$$\Rightarrow \|(M - u)x\| \leq C \langle (M - u)x, x \rangle^{1/2} \quad \forall x \in H$$

Aus der Definition von M existieren orthonormale (x_n)

s.d. $\|x_n\| = 1$ und $\langle u x_n, x_n \rangle \rightarrow M$.

Es folgt $\langle (M - u)x_n, x_n \rangle \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow M \in \sigma(u)$

Streng genommen ist zu zeigen:

$$u_n = (M I - u)^{-1} (M I - u) x_n \xrightarrow{n} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Τότε ορίζεται ο u όπως ευκολοφανής
 είναι ότι:

$$\|u\| = r(u) = \max \{ |m|, |M| \}$$

Για το τελευταίο βήμα στην απόδειξη:

- Έστω $u \neq 0$ (και άρα $u = u^*$). Τότε

$$\phi(u) \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow m, M \in \mathbb{R}^+$$

$$0 \leq \inf \{ \langle ux, x \rangle : \|x\|_H = 1 \} \leq \\ \leq \langle ux, x \rangle \quad \forall x, \|x\|_H = 1.$$

Για κάποιο $x \in H$ έχουμε $x' = \frac{1}{\|x\|} x$ και

$$\text{άρα } \langle ux', x' \rangle > 0 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|^2} \langle ux, x \rangle > 0$$

$$\Rightarrow \langle ux, x \rangle > 0.$$

- Αντίστροφα, έστω $u = u^*$ και $\langle ux, x \rangle > 0$.

Τότε $m, M \in \mathbb{R}^+$ και άρα:

$$\phi(u) \subseteq [m, M] \subseteq \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow u \neq 0.$$



Πρότ. Φάσπα τοποθετείται σε $B(X)$.

Ορισ. Έστω X χώρος Banach και $u \in B(X)$. Τότε.

(1) συμφορητικό φάσπα: $\sigma_p(u) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - u) \neq \{0\} \}$

(2) σφουγγηχθέν συμφορητικό φάσπα:

$$\sigma_a(u) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : \|(\lambda I - u)x_\varepsilon\| < \varepsilon \|x_\varepsilon\| \}$$

(3) compression φάσπα:

$$\sigma_c(u) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{(\lambda I - u)X} \neq X \}.$$

Λήμμα: (i) $\lambda \in \sigma_a(u) \iff \exists x_n, \|x_n\|_X = 1 \in u, (\lambda I - u)x_n \xrightarrow{n} 0$.

(ii) Τα $\sigma_a(u)$ και $\sigma_c(u)$ διακρίνουν το ίδιο φάσμα.
 π.χ. $X = \mathbb{C}^n$ τότε $\sigma(u) = \sigma_a(u) = \sigma_c(u)$ (πράγματι)

(iii) $\sigma(u) = \sigma_a(u) \cup \sigma_c(u)$.

Πρότ. Έστω X χώρος Banach και $u \in B(X)$. Τότε
 $\partial \sigma(u) \subseteq \sigma_a(u)$.

Απόδ. Έστω $(\lambda_n)_n \in \partial \sigma(u)$ και $\lambda = \lim_n \lambda_n$

Εφόσον $\lambda \in \sigma(u)$ ελάττωτο τότε $\partial \sigma(u) \subseteq \sigma(u)$ και επαρκώς

Θεωρούμε $B = \lambda I - u$ και $B_n = \lambda_n I - u$

ε.ω. $B_n \in \text{Inv}(B(X))$.

Gezw. zu 2.6 $G_a(u)$ ver. i. p. $\|Bx\| \geq 2\delta \|x\|$
 $\forall x \in X$. f. $\|x\|=1$ existiert: $Bx \rightarrow Bx$

Aus $\exists N : \|B_n x\| \geq \|Bx\| - \|B_n x - Bx\| \geq \delta \quad \forall n > N$
 Genauso $\|B_n x\| \geq \delta \|x\| \quad \forall x \in X, n > N$.

Gezw. $y \in X$ ver. $\exists n \in \mathbb{N}$ i. p. $x_n \in X : Bx_n = y$
 zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|Bx_n - y\| &\leq \|B_n x_n - y\| + \|(B - B_n)x_n\| \\ &= |\lambda - \lambda_n| \|x_n\| < |\lambda_n - \lambda| \frac{\|y\|}{\delta} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{B(X)} = X \Rightarrow 2 \notin G_c(u)$.

Genauso $2 \notin G_a(u) \cup G_c(u) = G(u)$ ist. □

- Frage: (i) $G(u^*) = \{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in G(u) \}$
 (ii) $G_p(u) = \{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in G_c(u) \}$
 (iii) $G_c(u^*) = \{ \bar{\lambda} \mid \lambda \in G_p(u) \}$

zu zeigen: $x \mapsto x^*$ ist bijektiv.

Gleichg. auf: $uv = I = vu \Leftrightarrow v^* u^* = I = u^* v^*$

Frage: Gezw. $u \in B(H)$ $\|x\|=1$. u normal. Zeige $G(u) = G_a(u)$

Beweis: Gezw. $2 \notin G_a(u)$ ver. $2 \perp (2I - u)H$. Zeige:
 $x \in \ker(2I - u^*)$ ver. $\|(2I - u)x\| \geq \delta \|x\|$ f. $\forall x \in H$
 Genauso u ist normal existiert:

$$\|(2I - u^*)x\|^2 \stackrel{\text{o. p. v.}}{=} \|(2I - u)x\|^2 \geq \delta^2 \|x\|^2 \Rightarrow 2 \notin G_c(u) \Rightarrow 2 \notin G(u)$$

Ops Geze H jeffisien $\approx$ por. (ent von G) N_1
angew. V. b. $G: H \times H \rightarrow G$

and other species of the same genus (resquilineae)
or other species of the same genus to be placed in the same
group as the same.

$$G(2x_1 + x_2, y) = 2G(x_1, y) + G(x_2, y)$$

$$\begin{aligned} G(2x_1 + x_2, y) &= 2G(x_1, y) + G(x_2, y) \\ G(x, 2y_1 + y_2) &= G(x, y_1) + 2G(x, y_2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} x, y \\ x_1, x_2 \in \\ y_1, y_2 \end{array}$$

Thy. (Polarization) Για την εξαγωγή:

$$b(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 b(x + i^k y, z + i^k y).$$

Großes: $\phi = \phi' \iff \phi(x, x) = \phi'(x, x) \quad \forall x \in M.$

Th 7.9. Für H x. H. liefert man $u \in B(H)$ mit u

$$(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$$

Qu'en est-il pour l'équivalence. Aprs $u=v \Leftrightarrow \langle u(x), x \rangle = \langle v(x), x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{A}$

Ops: Given $u \in B(4)$ characterize unitary on $\mathbb{C}^4$

però av: $uu^* = I_A = u^*u$.

Isomorphism: $u^{-1} = u^*$

Thm: $u \in B(A)$ is invertible $\iff u^*u = I_A$
(quasi)

2.3.1 Τηλ. Έστω $H = l^2(N)$ και έστω $u \in B(l^2(N))$
 με $u e_n = \lambda_n e_n$. Τότε $\{ \lambda_n \}_n$ είναι γραμμικά
 και u είναι "διαγώνιος". Τότε ο u^* είναι
 $u^* e_n = \bar{\lambda}_n e_n$ (γιατί;).

Ενδεόν έστω $u u^* = u^* u$ (γιατί;).

2.3.2 Τηλ. Έστω $H = l^2(N)$ και έστω $S \in B(l^2(N))$
 με $S e_n = e_{n+1}$ (καθώς unilateral shift.)

Τότε $S^* e_n = \begin{cases} 0 & n=1 \\ e_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$ (καθώς backward shift.)

Τότε: $u^* u = I$.

- $\sigma_p(u) = \emptyset$.

- $\sigma_p(u^*) = \{ \lambda \mid |\lambda| < 1 \}$ εφόσον

για $\lambda = \sum_n \lambda^n e_n$ έστω $u^*(\lambda) = \lambda x$.

- Άρα $\sigma(u) = \sigma(u^*) = \mathbb{D}$.

(γιατί να απαντήσουμε ως ανόσιγες.)

Σημ. Εφόσον $H \approx l^2(N)$ αν H έχει ζεύγη $n \in N$?
 ορθοκανονικά βάση τότε τα παραπάνω δι-
 νουν τον unilateral shift.

Προβλήματα - Μορικές ισομορφίες

-13

Εστω $H \times H$ Hilbert και K κλειστός υπόχωρος.

• Τότε υπάρχει $z \in H$ γραμμική μορφή ως

$$z = z_K + z_{K^\perp} \quad z_K \in K \quad z_{K^\perp} \in K^\perp$$

Ο τελεστής $P_K: H \rightarrow H$ με $P_K(x) = z_K$ ονομάζεται (ορθογώνιος) προβολή στον K . Τότε:

$$P_K = P_K^* \quad \text{και} \quad P_K = P_K^2 \quad (\text{γινώρι;})$$

$$\|P_K\| = 1 \quad \text{και} \quad \sigma(P_K) = \{0, 1\}$$

• Για $u \in B(H)$ λέμε ότι ο K είναι αναλλοίωτος για u αν $u(K) \subseteq K$. Ισοδύναμα αν:

$$u P_K = P_K u P_K$$

Λέμε ότι ο K είναι reducing αν ο K και ο $K^\perp$ είναι αναλλοίωτοι για u . Ισοδύναμα:

$$u P_K = P_K u$$

(γινώρι; επιπλέον ότι: $P_{K^\perp} = 1 - P_K$ και έτσι K αναλλοίωτος για $u \iff K^\perp$ αναλλοίωτος για u^*)

• Γενικότερα για $u \in B(H)$ και K μπορούμε να γράψουμε:

$$u = \begin{bmatrix} P_K u P_K & P_K u P_{K^\perp} \\ P_{K^\perp} u P_K & P_{K^\perp} u P_{K^\perp} \end{bmatrix}$$

• Αντίστροφα, Έστω $p \in B(H)$ ε.ω. :

$$p = p^* \text{ και } p = p^2$$

Τότε $p = p_k$ για $k = p(H) (= \overline{p(H)})$
(γιατί)

2.3.2 Θpt. Έστω p, q προβολές σε $B(H)$ για
 H χώρο Hilbert. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(1) $p \leq q$

(2) $pq = p$

(3) $qp = p$

(4) $p(H) \subseteq q(H)$

(5) $\|p(x)\| \leq \|q(x)\| \quad \forall x \in H$

(6) $q - p$ είναι προβολή.

Ανσ. Δείξτε (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4) και (2) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (5): Εφόσον $p \leq q$ τότε:

$$\|q(x)\|^2 - \|p(x)\|^2 = \langle (q - p)(x), x \rangle = \|(q - p)^{1/2}(x)\|^2 \geq 0$$

(5) $\Rightarrow$ (2): Εφόσον $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$ τότε:

$$\|p(1 - q)x\| \leq \|q(1 - q)(x)\| = 0$$

$$\Rightarrow p(1 - q) = 0 \Rightarrow p = pq$$



Op6: Gegeben $u \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ für H_1, H_2 x. H. l. Vektorräume
positiv isotopisch an 0 isotopisch
 falls $\ker u = \ker(u)^{\perp}$ d.h. $\ker(u)$ isotopisch.
 Isotopisch: $\|u(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \ker(u)^{\perp}$.

(Bsp: $u(x) = 0 \quad \forall x \in \ker u$ d.h. $H = \ker(u) \oplus \ker(u)^{\perp}$)

2.3.3 Op7: Gegeben $u \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ für H_1, H_2 x. H. l. Vektorräume

zu zeigen: u ist Isotopisch.

- (1) $u = u u^* u$
- (2) $u^* u$ ist orthogonal
- (3) $u u^*$ ist orthogonal
- (4) u ist positiv isotopisch

Ansd: (1) $\Rightarrow$ (2): $(u^* u)^* = (u^* (u)^*)^* = u^* u$ d.h.
 $(u^* u)^2 = u^* (u u^* u) = u^* u$

(2) $\Rightarrow$ (1): Gezeigt ist $u^* u$ orthogonal d.h.

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^* u(x), x \rangle = \\ &= \langle (u^* u)^2 x, x \rangle = \langle u^* u(x), (u^* u)(x) \rangle = \|u^* u(x)\|^2 \end{aligned}$$

$\forall x \in H_1$

Gesamt:

$$\|u(1 - u^* u)x\| = \|u^* u(1 - u^* u)x\| = 0 \quad \forall x \in H_1$$

$$\Rightarrow u(1 - u^* u) = 0 \Rightarrow u = u u^* u$$

$(2) \Rightarrow (3)$: Έστω u προβολή έχουμε
 $(uu^*)^2 = u(u^*u)(u^*u)u^* = uu^*uu^* = (uu^*)^2$
 $\Rightarrow \text{rang}(uu^*) \in \{0, 1\}$ (γιατί?)
 Άρα από Functional Calculus $(uu^*)^2 = uu^*$
 και $(uu^*)^2 = uu^*$, άρα είναι προβολή.

$(3) \Rightarrow (2)$: Ομοίως.

$(1) \Rightarrow (4)$: Έστω $u = uu^*u$ τότε έχουμε
 ότι u u^*u είναι προβολή επί του $(\ker u)^\perp$
 (γιατί; επί $u^* = u^*uu^*$ και $(\ker u)^\perp = \overline{u^*(H_2)} =$
 $= u^*u(H_1)$).

Για $x \in (\ker u)^\perp$ έχουμε:

$$\|u(x)\|^2 = \langle u^*u(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Άρα u είναι ισομετρία.

$(4) \Rightarrow (2)$: Έστω u ισομετρία και
 $p: H_1 \rightarrow (\ker u)^\perp$ προβολή. Για $x \in (\ker u)^\perp$ έχουμε

$$\langle u^*u(x), x \rangle = \|u(x)\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle px, x \rangle$$

Για $x \in \ker u$ έχουμε:

$$\langle u^*u(x), x \rangle = 0 = \langle px, x \rangle$$

Άρα $u^*u = p$.



2.3.4 (Polar decomposition): Έστω $v \in B(H)$.

Τότε υπάρχει $u \in B(H)$ ^{μοναδιαία} με την ιδιότητα ώστε
 $v = u|v|$ και $\ker u = \ker v$

Γνινδένου $u^*v = |v|$.

Ανάλ. Για $x \in H$ έχουμε:

$$\| |v| x \|^2 = \langle |v|^2 x, x \rangle = \langle v^* v(x), x \rangle = \| v(x) \|^2.$$

Ομοίως u ορίζουμε,

$$u_0: |v|(H) \rightarrow v(H): u_0(|v|(x)) = v(x)$$

είναι καλά-ορισμένη γραμμική ισομετρία.

Την επεκτείνουμε σε $\overline{|v|(H)}$ και επεκτείνουμε
σε $\overline{|v|(H)}^\perp$ μέσω του 0.

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x) & x \in |v|(H) \\ 0 & x \in \overline{|v|(H)}^\perp \end{cases}.$$

Τότε οι ορισμοί $u|v| = v$ και u είναι
με την ιδιότητα όλων $(\ker u)^\perp$ (αφού
 $\ker u = \overline{|v|(H)}^\perp$). Επίσης $\ker u = \ker(|v|)$.

Τώρα:

$$\begin{aligned} \langle u^* v(x), |v| y \rangle &= \langle v(x), v(y) \rangle = \langle v^* v(x), y \rangle \\ &= \langle |v|(x), |v| y \rangle. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u^* v|_{|v|(H)} = |v|_{|v|(H)}$$

$$\text{και } u^* v|_{(\overline{|v|(H)})^\perp} = 0 = |v|_{(\overline{|v|(H)})^\perp}$$

Επίσης η συνάρτηση $x \mapsto b(x, x)^{1/2}$ είναι
 η νόρμα των H .

• Μια sesquilinear σε χώρο H ονομάζεται
 καδωμένη (bounded) αν $\exists M > 0$ ε.ω:

$$|b(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

Ορίζεται $\|b\| = \inf \{ M > 0 : |b(x, y)| \leq M \|x\| \cdot \|y\| \}$
 $\forall x, y \in H$

Τότε $|b(x, y)| \leq \|b\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Πρτ: b bounded $\iff b$ sesquilinear.

Αντ: (γιατί;) Οποιας b σε H $\implies$ $\square$

2.3.5 Θpt: Έστω $u \in B(H)$ για χώρο Hilbert H

Τότε η αντιστοίχηση: $b_u: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ $b_u(x, y) = \langle ux, y \rangle$

είναι sesquilinear (και $\|b_u\| = \|u\|$)

Επίσης η b_u είναι αυτοσυσζυγής αν $u = u^*$

Οποιας η b_u είναι θετική αν $u \geq 0$.

Αντ: Έχει καθορισθεί από τη προηγούμενη
 (γιατί).

$\square$

2.3.6 Q₁₁ Έστω ϕ γραμμικό sesquilinear στο χώρο Hilbert H . Τότε υπάρχει μοναδικός $u \in B(H)$ ε.ω. $\phi(x, y) = \langle u(x), y \rangle \quad \forall x, y \in H$ (και $\|u\| = \|\phi\|$).

Ανθ. Για $y \in H$ ορίζεται $H \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \phi(x, y)$. Αυτή είναι γραμμική συναρτησυνολός και από Q₁₁ Riesz υπάρχει μοναδικό $v(y)$ ε.ω.

$$\phi(x, y) = \langle x, v(y) \rangle$$

$$\text{Επίσης } \|v(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi(x, y)| \leq \|\phi\| \cdot \|y\|$$

Αντίστροφα, αν v είναι γραμμική και από το προηγούμενο είναι γραμμικός στον $B(H)$. Τότε για $u = v^*$ έχουμε $\phi(x, y) = \langle u(x), y \rangle$.

Τέλος έχουμε:

$$|\phi(x, y)| = |\langle u(x), y \rangle| \leq \|u\| \|x\| \|y\|$$

$$\Rightarrow \|u\| \leq \|u\|$$

$$\text{Άρα } \|u\| = \|u\|.$$

Q.E.D.

Προτεινόμενες ασκήσεις.

Murphy: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4
2.5, 2.6, 2.7, 2.8,
2.9, 2.10

Strong: 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8, 2.5.9,
2.5.15, 2.5.16, 2.5.17, 2.5.18,
2.5.19, 2.5.23, 2.5.25

3.4.1, 3.4.2, 3.4.3
3.4.5, 3.4.6, 3.4.9