

Κεφάλαιο 1. Στοιχειώδης φασματική Τεχνική

Κύρια ονόματα:

- Φέσχα
- Φασματική ανάλυση (Burling)
- Θερμική ανάλυση Gelfand για
μικροδομικούς δείκτες Benach

Σημείωση: όλοι οι γραπτικοί κύριοι και οι
δείκτες είναι από τον χώρο των
μικροδομικών ερευνών $\mathbb{C}$ (από τον χώρο των
μικροδομικών ερευνών $\mathbb{C}$ διαφοροποιεί)

Σημ. (1) Ο ορισμός αντασχετίζεται με την $(A, \|\cdot\|)$ δίνοντας δύο κοινά ευρήματα. Αν λοιπόν:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a \\ b_n \xrightarrow{\|\cdot\|} b \end{array} \right\} \Rightarrow a_n b_n \xrightarrow{\|\cdot\|} ab \quad (\text{γιατί;})$$

[Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\|ab - a'b'\| \leq \|a\| \|b - b'\| + \|a - a'\| \|b'\|$$

επί (a_n) και (b_n) δίνοντας αποφασιστικά το αποτέλεσμα.]

(2) Μια υπαντιστοιχία B της $\mathcal{L}(A, A)$ με το νόρμα $(A, \|\cdot\|_A)$ δίνει $\mathcal{L}(B, B)$ με νόρμα $\|b\|_B = \|b\|_A$.
 Δύο παρατηρήσεις.

Αν $\mathcal{L}(A, A)$ δίνει $\mathcal{L}(A, A)$ Banach και $\mathcal{L}(B, B)$ δίνει $\mathcal{L}(B, B)$ Banach τότε $\mathcal{L}(A, B)$ δίνει $\mathcal{L}(A, B)$ Banach.

1.1 $\text{Alg} \otimes \text{Banach}$.

Ορισμοί: (1) H A είναι $\text{Alg} \otimes \text{Banach}$ αν:

- είναι γνήσιος χώρος (εν E)
- είναι εξοπλισμένη με διγνήσιες ενεργειές

$$\cdot : A \times A \longrightarrow A : (a, b) \longmapsto ab$$

έτσι ώστε $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in A$

(2) H $B \subseteq A$ कहलर ιδεα εν A αν:

$$bb' \in B \quad \forall b, b' \in B.$$

(3) Μια νόρμα $\|\cdot\|$ εν A कहलर μονοτονική

$$\text{αν: } \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Σε αυτή την περίπτωση $(A, \|\cdot\|)$ कहलर ιδεα
με νόρμα.

(4) Αν $1 \in A$ είναι στοιχείο 1 τέτοιο ώστε:

$$\|1\| = 1 \quad \text{και} \quad 1 \cdot a = a \quad 1 = a \quad \forall a \in A$$

τότε το στοιχείο 1 कहलर μονάδα εν A
και $(A, \|\cdot\|)$ कहलर μοναδιαία.

(5) H $(A, \|\cdot\|)$ कहलर $\text{Alg} \otimes \text{Banach}$ αν

είναι πλήρως μετρώσιμη εν comologie εν νόρμα

Topological

-3

1.1.1 Έστω S σύνολο. Ορίζεται:

$$l^\infty(S) = \{ (a_s)_{s \in S} \mid a_s \in \mathbb{C} \ \forall s, \sup_{s \in S} |a_s| < \infty \}$$

to πρώτος:

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$(\lambda f)(s) = \lambda f(s) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(f \cdot g)(s) = f(s) g(s)$$

der νόρμα: $\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|$.

$(l^\infty(S), \|\cdot\|_\infty)$ είναι ένα Banach (γιατί) το πρώτο $\mathbf{1} = (\mathbf{1})_{s \in S}$.

1.1.2 Έστω Ω τοπολογικός χώρος. Ορίζεται:

$$C_b(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής, } \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| < \infty \}$$

to το δεύτερο πρώτος. Τότε η $C_b(\Omega)$ είναι κάποιο υποχώρο της $l^\infty(\Omega)$.

Αν ο χώρος Ω είναι συμπαγής τότε η $C_b(\Omega)$ ταυτίζεται με τον χώρο.

$$C(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής} \}.$$

(γιατί)

1.1.3 Έστω Ω τοπικά συμπαγές χώρος Hausdorff. Μ. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής τότε τα πυκνιζόμενα στο άνω όριο $\{f \in C(\Omega) \mid \exists \epsilon > 0 \text{ το σύνολο } \{ \omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \epsilon \} \text{ είναι συμπαγές.}\}$

Ορίζεται: $C(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής και πυκνιζόμενα στο άνω όριο}\}$

Τότε η $C(\Omega)$ είναι υπεύθυρα ως $C(\Omega)$ Γκρινδίου είναι κλειστή ως προς άλγεβρα Banach, ως προς $\|\cdot\|_\infty$ (γιατί).

Προτάση: $\left\{ \begin{array}{l} C(\Omega) \text{ πυκνιζόει} \\ \text{σε πυκνιζόει } \mathbb{C} \end{array} \right\} \iff \Omega \text{ συμπαγές}$
 και αν αυτό επιβεβαιωθεί τότε $C(\Omega) = C(\Omega)$.

Σημ. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται τοπικά συμπαγής αν κάθε σημείο έχει συμπαγή περιοχή ($\forall x \in X$ υπάρχει U ανοικτό με x συμπαγές ώστε $x \in U \subseteq K$).

Αν ενδιαίον ο X είναι Hausdorff τότε ισοδυναμεί:

- (1) κάθε σημείο έχει συμπαγή περιοχή
- (2) — " — ————— κλειστό — " —
- (3) — " — ————— έχει τοπική βάση από συμπαγείς περιοχές
- (4) — " — ————— κλειστό — " —

5

Zeige $A(D) \subseteq C(D)$ (von links durch unistruktur
(gerig))

1.1.4 Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα.

Ορίζεται $B(X) = \{u: X \rightarrow X \mid u \text{ γραμμικός και } \text{φραγμένος}\}$

Ορίζεται $\|u\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$.

Έστω $\alpha \in B(X)$ γραμμικός χώρος με νόρμα.

Αν $\alpha \in X$ είναι χώρος Banach τότε $\alpha \in B(X)$ είναι χώρος Banach.

Πρόσθετα: $X = \mathbb{C}^n$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε α. οφείνται:

(1) $B(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C}) = \{[a_{ij}] : a_{ij} \in \mathbb{C}\}$.

(2) $\|A\|_{B(\mathbb{C}^n)} = \|A^* A\|^{1/2} \quad \forall A \in M_n$

(3) Αν $A = A^*$ τότε $\|A\| = \sup \{|\lambda| : \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A\}$

(4) Για $A = [a_{ij}]$ έχουμε:

• $|a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|$

• $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2 \right)^{1/2}$

(για a_{ij})

(5) Οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{C}^n$ είναι πολλαπλάσια κλειστά υποχώροι του M_n

Υπόληψη: Έστω $(A, || \cdot ||)$ 'αλγεβρα f.v. 4

- Αν $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ με $B_\alpha \subseteq A$ υπάλγεβρα $\forall \alpha \in I$ τότε η $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ είναι υπάλγεβρα.
- Για σύνθετο S υποσύνολο της A ορίζεται
$$\text{alg } S = \bigcap \{ B : S \subseteq B, B \text{ υπάλγεβρα της } A \}$$

Είναι η μικρότερη υπάλγεβρα που περιέχει την S , δεν διαφέρει από την $\text{alg}(S)$ είναι η 'αλγεβρα που περιέχει την S .

- Αν $S = \{a\}$ με $a \in A$ τότε:
$$\text{alg}(S) = \text{span} \{a^n : n \in \mathbb{N}\}.$$
- Η κλειστότητα 'αλγεβρα που περιέχει το S
είναι $\overline{\text{alg}(S)} \equiv \text{alg}(S)$

Πρόταση: $A = C(\pi)$ με π μονοεικό ισομορφισμο
Εστω $z: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ η ταυτοτική αντιστοίχιση. Τότε

$$\overline{\text{alg}(z, \bar{z})} = C(\pi)$$

(συνεπώς Stone-Weierstraess).

• Για οριζήσιο (αντ. δοξιο) ιδανικός I αν A είναι ένας διανομοειδής χώρος ε.ω. : $a \in A, b \in I \Rightarrow ab \in I$
(αντ. $ba \in I$).

• Για ιδανικός $I \subseteq A$ δεν υπάρχει χώρος που είναι αυτόχρονα οριζήσιο και δοξιο ιδανικός.

Προτάσεις: (ο), A περιττή ιδανικός.

• Για πομπικό ιδανικός I είναι ένα πρώτο ιδανικός $I \subseteq A$ ($I \neq (0), A$) ε.ω.

αν $\bigcup_{(op/δoξi)} \text{ιδανικοί ως } A \text{ με } I \subsetneq J \text{ τότε } J=A$.

• Για ιδανικός $I \subseteq A$ λέγεται modular αν υπάρχει $u \in A$ ε.ω. $a - au \in I$ αν $a - ua \in I$

Από λίμμα 2 αν κάθε πρώτο modular ιδανικός περιέχει σε ένα πομπικό ιδανικός (γιατί).

Παράδειγμα: Έστω Ω τ.ε.χ. A , με οριζήσιο

$$M_\omega = \{ f \in C_0(\Omega) \mid f(\omega) = 0 \} \text{ για } \omega \in \Omega.$$

Τότε M_ω είναι modular ιδανικός (γιατί υπάρχει $u \in C_0(\Omega)$ ε.ω. $u(\omega) = 1$) με $M_\omega \oplus C_u = C_0(\Omega)$

- Αν $I \subseteq A$ ιδεώδες τότε ο χώρος A/I γίνεται άλγεβρα; $(a+I)(b+I) = ab+I$
- I modular $\iff A/I$ μονοδιαία.
Αρα αν A μονοδιαία τότε αυτός ιδεώδες είναι modular.
- Αν $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ οικογένεια ιδεωδών της A τότε $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ είναι ιδεώδες της A .
- Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε το (εδαίο) ιδεώδες να "περιέχει" ένα υποσύνολο $S \subseteq A$.

11.1 Θεώρημα: Έστω I εδαίο ιδεώδες της $(A, \|\cdot\|)$. Τότε ο χώρος συνδυασμού A/I γίνεται άλγεβρα με νόρμα: $\|a+I\| := \inf \{ \|a+b\| : b \in I \}$

Απόδειξη: Έστω ε>0 και $a, b \in A$. Τότε $\exists \alpha, \beta \in I$ ε.ω.
 $\|a+\alpha\| < \|a+I\| + \varepsilon$
 $\|b+\beta\| < \|b+I\| + \varepsilon$.

Για $c = \alpha\beta + a\beta + \alpha\beta' \in I$ έχουμε:
 $\|a\beta + c\| \leq \|a+\alpha\| \cdot \|b+\beta\| < (\|a+I\| + \varepsilon)(\|b+I\| + \varepsilon)$
inf $\implies \|a\beta + I\| \leq (\|a+I\| + \varepsilon)(\|b+I\| + \varepsilon)$
ε=0 $\implies \|a\beta + I\| \leq \|a+I\| \cdot \|b+I\|$ □

Σ 4: Αν $(A, \|\cdot\|)$ είναι Banach και $I \in \mathcal{A}^{10}$
 τότε $(A/I, \|\cdot\|)$ είναι Banach

Μορφισμοί: A, B είναι

- Μια ανάλυση $\varphi: A \rightarrow B$ καλείται μορφισμός
 αν είναι γραμμική και $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
 $\forall a, b \in A$.

- Ο πυρήνας $\ker \varphi$ είναι ιδανικό της A

- Η εικόνα $\varphi(A)$ είναι υπό-ανάλυση της B

- Η φ καλείται μονομορφισμός αν A, B είναι
 μονάδες και $\varphi(1_A) = 1_B$.

- Αν $I \triangleleft A$ τότε $\varphi: A \rightarrow A/I: a \mapsto a+I$
 είναι μορφισμός.

- Έστω $\varphi, \psi: A \rightarrow B$. Τότε $\varphi = \psi$ αν
 $\varphi|_S = \psi|_S$ για κάποιο S ώστε $\overline{\text{alg}(S)} = A$

(γιατί)

Παράδειγμα. Έστω $A(D)$ η άλγεβρα του Σίσκου. Έστω $\lambda \in D$ και ορίσουμε:

$$ev_\lambda: A(D) \rightarrow \mathbb{C}, \quad ev_\lambda(f) := f(\lambda) \quad f \in A(D)$$

Πότε: (1) ev_λ είναι συνεχής μορφισμός
 (2) Αν $\varphi: A(D) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής μορφισμός τότε $\varphi = ev_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in D$.

Βήμα 1ο. Έστω $z: D \rightarrow \mathbb{C}$. Θέτουμε $\lambda = \varphi(z)$

Τότε $\varphi(f) = ev_\lambda(f) = f(\lambda) \quad \forall f \in \overline{\text{alg}\{z\}}$.

Βήμα 2ο: $\overline{\text{alg}\{z\}} = A(D)$.

Έστω $f \in A(D)$ Για $r \in (0,1)$ ορίσουμε $f_r \in C(D)$ με $f_r(z) = f(rz)$. Τότε:

- $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - f_r\|_\infty = 0$ (από τη συνέχεια)
- f_r συνεχίζεται σε ολόκληρο επίπεδο και
 διότι $D(0, 1/r) \supseteq D$ και από την
 οποιοδήποτε σημείο της κομψής ζεύξης.
- Άρα και f είναι οποιοδήποτε σημείο
 κλεισίματος $\Rightarrow f \in \overline{\text{alg}\{z\}}$.

1.2 Φάση και φαστική αλgebra

- $\mathbb{C}[z]$: χώρος πολυωνύμων στην μεταβλητή z με συντελεστές μιγαδικούς
- Αν A μοναδιαία άλγεβρα και $a \in A$ τότε γράγουμε
$$p(a) = \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_n a^n$$

για $p \in \mathbb{C}(z)$ με $p(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n$
- Η αντιστοίχια $\mathbb{C}[z] \rightarrow A : p \mapsto p(a)$
δίνει μοναδιαίες αλγεβρικές ταυτισμούς
- Για στοιχείο $a \in A$ για μοναδιαία άλγεβρα A
καλείται αντιστρέψιμο αν υπάρχει $b \in A$ ε.ω.
 $ab = ba = 1$
- Τότε το b είναι μοναδικό (γιατί;) και το
συμβολίζουμε με a^{-1} .
- Γράγουμε $\text{Inv}(A) := \{a \in A \mid a \text{ αντιστ.}\}$
το οποίο είναι ομάδα ως προς πολλαπλασιασμό.

Οπ6: Έστω A μοναδιαία άλγεβρα και $a \in A$.

Το φάσμα του a ορίζεται να είναι:

$$\sigma(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin \text{Inv}(A) \} \subseteq \mathbb{C}.$$

Μερικές φορές γράγουμε $\sigma_A(a)$.

1.2.1 $\mathcal{I}f$: $A = C(\Omega)$ για Ω χώρο x, t .
 Τότε $\mathcal{G}(f) = f(\Omega) \neq \emptyset$ (γιατί)

1.2.2 $\mathcal{I}f$: $A = l^\infty(S)$ για $S \neq \emptyset$ σύνολο. Τότε:
 $\mathcal{G}(f) = \{ \overline{f(S)} \}$ (κλειστό σύνολο στο $\mathbb{C}$)
 $\forall f \in l^\infty(S)$
 (γιατί).

1.2.3 $\mathcal{I}f$: $A = \text{Inv}(A)$. Τότε
 $\mathcal{G}(a) = \{ \text{εξισότιμα ιδιοτιμών} \}$ (γιατί)

1.2.4 Σημείωση: Έστω $a, b \in A$ (A : πομ. άλγ.).
 Τότε: $1 - ab \in \text{Inv}(A) \iff 1 - ba \in \text{Inv}(A)$.
 Επιπλέον: $c = (1 - ab)^{-1}$ τότε $1 + bca = (1 - ba)^{-1}$
 Γιατί όμως $\mathcal{G}(ab) \setminus \{0\} = \mathcal{G}(ba) \setminus \{0\}$.

1.2.1 $\mathcal{O}p$: Έστω $a \in A$ (A : πομ. άλγ.) Αν
 $\mathcal{G}(a) \neq \emptyset$ και $p \in \mathbb{C}[z]$, τότε
 $\mathcal{G}(p(a)) = p(\mathcal{G}(a)) :=$
 $= \{ p(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{G}(a) \}$.

Ανάλυση: ① Αν $p(z) = \mu$ τότε:

$$\sigma(p(a)) = \sigma(\mu) = \{\mu\} \quad \text{και}$$

$$p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(a)\} = \{\mu\}.$$

② Έστω p μ ομογενής πολυώνυμο και για $\mu \in \mathbb{C}$ γράφουμε $p(z) - \mu = \lambda_0(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$ στο $\mathbb{C}$. άρα:

$$p(a) - \mu = \lambda_0(a - \lambda_1) \cdots (a - \lambda_n).$$

Άρα: $p(a) - \mu \in \text{Inv}(A) \iff \begin{matrix} a - \lambda_1 \\ \vdots \\ a - \lambda_n \end{matrix} \in \text{Inv}(A)$

Άρα: $\mu \in \sigma(p(a)) \iff$ υπάρχει λ_i στο $\sigma(a)$
 όπου $p(\lambda_i) = \mu$ και άρα αφού είναι μονόφυτο $\iff \mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(a)$ $\mu \in \sigma(p(a))$.

Συνεπώς $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. □

2.2 Θεώρημα Έστω A φανερά αλγεβρα Banach και $a \in A$ με $\|a\| < 1$. Τότε $1 - a \in \text{Inv}(A)$ και $(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Ανάλυση: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| < \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = (1 - \|a\|)^{-1} < \infty$
 Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ συγκλίνει (στην A). Τότε:

$$(1 - a)(1 + a + \dots + a^n) = 1 - a^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \|a\| < 1$$

$$(1 + a + \dots + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Συνεπώς $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^n) = (1 - a)^{-1}$. □

1.2.3 Opt Έστω A παραδοσιακή άλγεβρα Banach. Τότε το σύνολο $\text{Inv}(A)$ είναι ανοικτό στην A και η αντιστροφή

$$\text{Inv}(A) \rightarrow A : a \mapsto a^{-1}$$

είναι συνεχής.

Αντ. Για $a \in \text{Inv}(A)$ θα δείξουμε ότι

$$\{b \mid \|b - a\| < \|a^{-1}\|^{-1}\} \subseteq \text{Inv}(A)$$

και άρα $\text{Inv}(A)$ είναι ανοικτό.

Πράγματι: $\|ba^{-1} - 1\| \leq \|b - a\| \|a^{-1}\| < 1$ και από την προηγούμενη άσκηση $ba^{-1} \in \text{Inv}(A)$, συνεπώς $b \in \text{Inv}(A)$.

Διαφορίστην απάνει ότι υπάρχει γραμμική αντιστροφή $u: A \rightarrow A$ έτσι ώστε:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\|(a+c)^{-1} - a^{-1} - u(c)\|}{\|c\|} = 0 \quad \forall a \in A$$

(συγκρίστε με $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.)

Βύτη 10: Για $b \in A$ με $\|b\| < 1$ έχουμε ότι $1+b \in \text{Inv}(A)$ και:

$$\begin{aligned} \|(1+b)^{-1} - 1 - b\| &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b^n - 1 - b \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b^n \right\| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|b\|^n = \|b\|^2 \frac{1}{1 - \|b\|} \end{aligned}$$

-5

Byz. 20: Given $a \in A$ such that $ca \neq 0$ e.w.
 $\|c\| < \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-1}$. To show:

$$\|a^{-1}c\| \leq \|a^{-1}\| \cdot \|c\| < \frac{1}{2} < 1$$

Consequently also valid for $b = a^{-1}c$ to show:

$$\|(1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\| \leq \|a^{-1}c\|^2 \frac{1}{1 - \|a^{-1}c\|} < 2\|a^{-1}c\|^2 \quad (\text{valid})$$

Byz. 30: Optimize an expression:

$$u: A \rightarrow A \quad \text{f.e.} \quad u(b) = -a^{-1}ba^{-1} \quad (\text{given } a \in \text{Inv}(A))$$

To show:

$$\begin{aligned} \|(a+c)^{-1} - a^{-1} - u(c)\| &= \\ &= \|(1 + a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\ &\leq \|(1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\| \|a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^3 \|c\|^2 \end{aligned}$$

Given:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\|(a+c)^{-1} - a^{-1} - u(c)\|}{\|c\|} \leq \lim_{c \rightarrow 0} 2\|a^{-1}\|^3 \|c\| = 0$$

can also be shown

$$\text{Inv}(A) \rightarrow A: a \mapsto a^{-1}$$

Given topological

Σημείωση: Η $\mathcal{A}$ π -δυσμενής είναι ανοικτή!

Έστω $A = \mathbb{C}[z]$ με νόρμα $\|p\| = \sup_{|z| \leq 1} |p(z)|$

Από Θ.Θ.Α. έχουμε $\text{Inv}(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Λέμε τώρα $p_n(z) = 1 + \frac{z}{n} \notin \text{Inv}(A)$. $\hookrightarrow$ Σειρά με $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 \in \text{Inv}(A)$ που είναι ανοικτή.

Όμως $\lim_n p_n = 1 \in \text{Inv}(A)$ δεν έφα-
γε το $A \setminus \text{Inv}(A)$. Συν είναι κλειστό στο A
Αλλάζει το $\text{Inv}(A)$ στο είναι ανοικτό.

1.2.4 Λήμμα: Έστω A πολλαπλασιαστική Banach

αλγεβρά Τότε:

$$(1) \quad \sigma(a) \subseteq \mathbb{C} \text{ κλειστό}$$

$$(2) \quad \sigma(a) \subseteq \overline{B}(0, \|a\|)$$

$$(3) \quad \text{Η απεικόνιση } \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow A : \lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1} \text{ είναι διαμορφωτική.}$$

Απόδ. (1) & (2) $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ανοικτό. Έστω $\lambda \notin \sigma(a)$

Τότε $\lambda - a \in \text{Inv}(A)$. Εγείβον $\text{Inv}(A)$ ανοικτό
υπάρχει $\delta > 0$ ε.μ. $B(\lambda - a, \delta) \subseteq \text{Inv}(A)$.

Τότε για $\mu \in \mathbb{C}$ με $|\mu - \lambda| < \delta$ έχουμε:

$$\|(\mu - a) - (\lambda - a)\| = \|\mu - \lambda\| < \delta$$

και έτσι $\mu - a \in \text{Inv}(A) \Rightarrow \mu \notin \sigma(a)$. Συνεπώς

$$B(\lambda, \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$$

-7

② ~~Σ~~ δ_0 αν $|\lambda| > \|a\|$ τότε $\lambda \notin \sigma(a)$.

Για $|\lambda| > \|a\|$ έχουμε $\| \lambda^{-1} a \| < 1$ και άρα
 $1 - \lambda^{-1} a \in \text{Inv}(A)$. Συνεπώς $\lambda - a \in \text{Inv}(A)$.
(εμφ: ενα παρατήρησ $\lambda \neq 0$!)

③ Γίνετον από το Θρη 1.2.3. (γιατί). $\square$

1.2.5 Θρη (Gelfand). Έστω A μοναδιαία άλγεβρα
Banach και $a \in A$. Τότε $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Απόδ. Έστω $\sigma(a) = \emptyset$ και θα δείξουμε με άτοπο
Έστω $|\lambda| > 2\|a\|$ και άρα $\| \lambda^{-1} a \| < 1/2$, οπότε
 $1 - \| \lambda^{-1} a \| > 1/2$. Ζητούμεν:

$$\| (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} - 1 \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-1} a)^n \right\| \leq \\ \leq \| \lambda^{-1} a \| \cdot \frac{1}{1 - \| \lambda^{-1} a \|} \leq 2 \| \lambda^{-1} a \| < 1.$$

Άρα:

$$\| (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} \| \leq \| (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} - 1 \| + \| 1 \| < 2$$

και συνεπώς:

$$\| (a - \lambda)^{-1} \| = \| \lambda^{-1} (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} \| < \frac{2}{|\lambda|} < \| a \|^{-1}$$

(εμφ: $a \neq 0$ εφόσον $\sigma(a) = \emptyset$.)

Συνολικά η ανάλυση.

$$\mathbb{C} \longrightarrow A: \lambda \longmapsto (a - \lambda)^{-1}$$

(i) δείξτε ότι είναι γραμμική στο $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, 2\|a\|)$

(ii) είναι γραμμική στο $\overline{B}(0, 2\|a\|)$ και είναι
απενεργός, λόγω συνέπειας.

Άρα είναι γραμμική στο $\mathbb{C}$.

Τώρα, για $\tau \in A^*$ έχουμε ότι η ανάλυση

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: \lambda \longmapsto \tau((a - \lambda)^{-1})$$

είναι διαφορίσιμη και $\tau(a) = 0$. Άρα από
Θεώρημα Liouville είναι σταθερή, και

$$\tau((a - \lambda)^{-1}) = \tau((a - 0)^{-1}) = \tau(a^{-1}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Εφόσον ο A^* διαχωρίζεται από αυτήν, έχουμε

$$(a - \lambda)^{-1} = a^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\text{και άρα } [a - \lambda = a \Rightarrow \lambda = 0], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

που είναι άτοπο. $\square$

Σημείωση: Η αντιστροφή είναι συνεχής!

Για παράδειγμα το πολυώνυμο $p(z) = z$ και
έχουμε πρώτα αναμεταθέσεις έχοντας τον
φάσμα.

1.2 Θpt (Gelfand-Mazur) Έστω A μονοδιάστατη
 αλγεβρα Banach ε.ω. $A \setminus \{0\} = \text{Inv}(A)$.

Τότε $A \cong \mathbb{C}$

Απόδ: Έστω $a \in A, a \neq 0$. Θέσο $a = \lambda 1$ για κάποιο
 $\lambda \in \mathbb{C}$. Εφόσον $\sigma(a) \neq \emptyset$ τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma(a)$.
 Επομένως $\lambda - a \notin \text{Inv}(A) \Rightarrow \lambda - a = 0 \Rightarrow a = \lambda 1$

Οπρ: Για $a \in A$ σε A μονοδιάστατη αλγεβρα
 Banach ορίζουμε την φασματική ακτίνα

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

Από 1.2.1 Σηώδιο έχουμε ότι $r(ab) = r(ba)$

1.2.4 Πρpt: Έστω $A = C(\Omega)$ ο χώρος των A .x
 Τότε $r(f) = \sup_{\lambda \in \Omega} |f(\lambda)| = \|f\|_\infty$.

1.2.5 Πρpt: Έστω $A = M_2$ και $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Τότε $\|a\| = 1$ αλλά $r(a) = 0$ γιατί $\sigma(a) = \{0\}$.

1.2.4 Opf (Bourling) Gew A poudiaia ajyale Banach. Zize:

$$r(a) = \inf_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_n \|a^n\|^{1/n} \quad \forall a \in A.$$

Prop. Για $\lambda \in \mathbb{C}(a)$ υπάρχει $\lambda^n \in \mathbb{C}(a^n)$ και άρα

$$\|\lambda^n\| \leq \|a^n\|. \text{ συνεπώς:}$$

$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n}$$

Εστω $\Delta = B(0, 1/r(a))$ (όπου $1/r(a) = \infty$ αν $r(a) = 0$).

Αν $\lambda \in \Delta$, τότε: $|\lambda| < 1/r(a) \xrightarrow{\lambda \neq 0} |\frac{1}{\lambda}| > r(a)$

και άρα $1 - \lambda a \in \text{Inv}(A)$ (αρκεί να μείνει $\neq 0$)

Για $z \in A^*$ θεωρούμε την αντιστροφή

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{C} : \lambda \mapsto z((1 - \lambda a)^{-1})$$

που είναι αναδρομική (γιατί;). Άρα

υπάρκουν $c_n \in \mathbb{C}$ π.ω. $f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n, \lambda \in \Delta.$ ⊙₁

Από την άδην για $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|} \left(\leq \frac{1}{r(a)} \right)$

εχουμε $\|a\| < 1$ και άρα

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a^n$$

$$\Rightarrow z((1 - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n z(a^n) \quad \text{⊙}_2$$

Εφόσον $B(0, \frac{1}{\|a\|}) \subseteq B(0, \frac{1}{r(a)})$ αν

Απαιτημένης Συνέπειας έχουμε ότι

$$c_n = z(a^n) \quad \forall n \geq 0.$$

Συνεπώς: $\lim_n z(a^n) \lambda^n = \lim_n c_n \lambda^n = 0 \quad \forall \lambda \in A$
 που ίσα η ακολουθία $(z(a^n) \lambda^n)_n$ είναι γραμμικά
 εφ' όσον υπάρχει για κάθε $z \in A^*$ έχουμε από
 την Απαιτημένης Συνέπειας Πρόταση ότι η
 ακολουθία $(\lambda^n a^n)$ είναι γραμμικά: $\forall \lambda \in A$

$$\exists M = M(\lambda) \text{ ε.ω. } \|\lambda^n a^n\| \leq M \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} / |\lambda| \quad \text{για } \lambda \neq 0.$$

$$\Rightarrow \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in A \setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq r(a) \quad \updownarrow \quad |\lambda| < 1/r(a).$$

που η ανισότητα ολοκληρώνεται. □

126 Πρόβλημα Έστω $A = C^1[0,1] = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{δυναμικά}$

Η $C^1[0,1]$ είναι ισομετρία με ως κατά ορισμό
 ορισμένη και εφοδιασμένη με τη νόρμα

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in A)$$

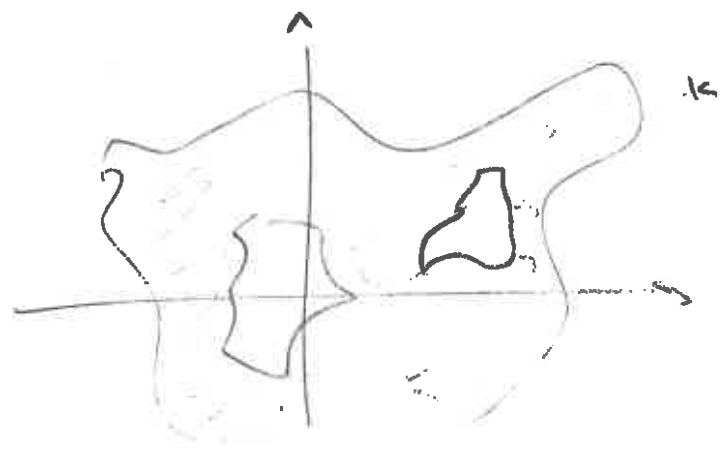
$\mathbb{A} C^1[0,1]$ είναι διάστημα με αυτή τη νόρμα (γνώρι;) και άρα είναι Banach. Έστω η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \quad f(x) = x$.

Τότε: $\|f^n\| = 1 + n$ άρα:

$$r(f) = \lim_n (1+n)^{1/n} = 1 < 2 = \|f\|.$$

Σημείωση: Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ μη κούβ σφαιρικός. Τότε στο Heine-Borel είναι κλειστό και γραμμικό και το σύνολο $\mathbb{C}-K$ είναι ακριβώς ένα μη γραμμικό μέτρος. Τα γραμμικά μέτρα του $\mathbb{C}-K$ καλούμε "μέτρο" του K .

Σημείωση.



1.2.8 Opt : Έστω A πολλαπλή άλγεβρα Banach και $1_A \in B \in A$ με B κλειστό υπόμορφο. Τότε

① $\text{Inv}(B)$ είναι κλειστό και ανοικτό ως $B \cap \text{Inv}(A)$.

② $G_A(b) \subseteq G_B(b)$ και $\partial G_B(b) \subseteq \partial G_A(b) \quad \forall b \in B$.

③ Αν $G_A(b)$ συν έχει ρύθμιση για $b \in B$ τότε $G_A(b) = G_B(b)$.

Απόδ: ① $\text{Inv}(B)$ είναι ανοικτό ως $B \cap \text{Inv}(A)$ γιατί $\text{Inv}(A)$ είναι ανοικτό.

Έστω $b_n \in B$ ε.ω. $b_n \xrightarrow{n} b$ για $b \in B \cap \text{Inv}(A)$.

Τότε $b_n^{-1} \xrightarrow{n} b^{-1}$ στην A (γιατί;) και αφού B κλειστό τότε $b^{-1} \in B$. Άρα $b \in \text{Inv}(B)$ και άρα $\text{Inv}(B)$ κλειστό.

② Υπόθεσιν $\text{Inv}(B) \subseteq \text{Inv}(A)$, έστω $G_A(b) \subseteq G_B(b)$

Για $\lambda \in \partial G_B(b)$ υπάρχει $(\lambda_n) \in \mathbb{C} \setminus G_B(b)$ με $\lambda_n \xrightarrow{n} \lambda$

Τότε $b - \lambda_n \in \text{Inv}(B) \Rightarrow b - \lambda_n \in \text{Inv}(A)$

αυτή $b - \lambda \notin \text{Inv}(B) \Rightarrow b - \lambda \notin \text{Inv}(A)$ (γιατί;)

Άρα $\lambda_n \notin G_A(b)$ και άρα $\lambda \in \partial G_A(b)$.

(3) Έστω $G_A(b)$ δεν έχει ρίζες, δηλαδή $\mathbb{C} \setminus G_A(b)$ είναι συνεκτικό. Εφόσον $\mathbb{C} \setminus G_B(1)$ είναι ελάχιστο και αυστηρό (1) υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus G_A(b)$ (2) τότε $\mathbb{C} \setminus G_B(1) = \mathbb{C} \setminus G_A(b)$. $\square$

1.2.8 Πρ8: Έστω $C := C(\mathbb{D})$, $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ως

$$A := \{ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής } f|_{\mathbb{D}} \text{ ομομορφική} \}$$

και $\varphi: A \rightarrow C: \varphi(f) = f|_{\pi}$.

Τότε η φ είναι ισομορφικός τορφοτισμός (ήδη της Αρχής Μείζονος έχουμε $\|f\|_{\infty} = \|\varphi(f)\|_{\infty}$)

Έστω $B := \overline{\text{alg}} \{1, z\} \subseteq C$.

Τότε: $G_B(z) = G_A(z) = \mathbb{D}$ και $G_C(z) = \pi$.

Πρ9: Έστω $a \in A$ (A : του αντίστοιχου Banach)

Εφόσον: $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{a^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|^n}{n!} = e^{\|a\|} < \infty$

τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει συν A .

Γράφουμε: $e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

Πρτρ Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow A$ διαφορίσιμες
 συναρτήσεις με παραγώγους f', g' . Τότε
 « fg είναι διαφορίσιμη και $(fg)' = fg' + f'g$
 (γιατί; αθίως τε προφανώς συναρτήσεις;
 Επίσης αν $f' = 0$ τότε $f = \text{σταθμ.}$:

Για $z \in A^*$ έχουμε ότι η συνάρτηση

$$z \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto z(f(t))$$

είναι διαφορίσιμη με $(z \circ f)' = 0$. Άρα
 είναι σταθμ. και $z(f(t)) = z(f(0)) \forall t$.

Εφόσον ισχύει $\forall z \in A^*$ έχουμε $f(t) = f(0) \in A$
 $\forall t$

1.29 Οπρ, Έστω A μοναδιαία άλγεβρα Banach.

(1) Αν $a \in A$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ διαφορίσιμη, $f(0) = 1$
 και $f'(t) = a f(t) \forall t \in \mathbb{R}$, τότε $f(t) = e^{ta} \forall t$

(2) Αν $a \in A$ τότε $e^a \in \text{Inv}(A)$ με $(e^a)^{-1} = e^{-a}$

(3) Αν $a, b \in A$ με $ab = ba$ τότε:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Ανάλυση. Πρώτα παραμύθι πως για $f(t) = e^{ta}$, $t \in \mathbb{R}$
έχουμε $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$ σφ' αριστερό.

Παραγυμίζουμε από προς όπο έχουμε $f'(t) = af(t)$

• Για $f, g: \mathbb{R} \rightarrow A$ διαφοροποιώτες τε

$$f'(t) = a f(t), \quad g'(t) = a g(t) \quad f(0) = g(0) = 1$$

έχουμε ότι η $h(t) = f(t)g(-t)$ είναι διαφορο-

ποιήσιμη τε $h'(t) = 0$ Άρα $h(t) = h(0) = 1$

Για $f(t) = g(t) = e^{ta}$, έχουμε:

$$e^{ta} e^{-ta} = 1 \quad \forall t \Rightarrow e^a e^{-a} = 1.$$

• Εφαρμόζουμε για f στο (1) με $g(t) = e^{tb}$

έχουμε $f(t) e^{-tb} = 1 \Rightarrow f(t) = e^{tb} \quad \forall t.$

• Για $a, b \in A$ με $ab = ba$ έχουμε

$$f(t) = e^{ta} e^{tb}.$$

Τότε $f(0) = 1$ με $f'(t) = e^{ta} b e^{tb} + a e^{ta} e^{tb}$

(από την διαφοροποίηση γινόμενων) με άρα

$$f'(t) = (a + b) f(t)$$

(συμ: $b e^{ta} = e^{ta} b$ με $a e^{tb} = e^{tb} a$.)

Άρα $f(t) = e^{t(a+b)} \quad \forall t \Rightarrow e^{a+b} = f(1) = e^a e^b.$



- Αν η A είναι αβελιανή τότε και η $\hat{A}$ είναι αβελιανή.
- Αν η A έχει νόρμα, τότε "μία" νόρμα που μπορούμε να ορίσουμε στην $\hat{A}$ είναι η $\|a + \lambda 1\| = \|a\| + \|\lambda 1\| \quad a \in A, \lambda \in \mathbb{C}.$
- Με την εν νόρμα έχουμε ότι:
 - $A \subseteq \hat{A}$ κλειστή υπόσφα
 - αν A Banach τότε η $\hat{A}$ είναι Banach

Πρ. Αν η A είναι ην ποινδισία, τότε ορίουμε το φαστα για $a \in A$ ως εξής:

$$\sigma_A(a) := \sigma_{\hat{A}}(a) \quad \left(\text{ή } \sigma_A(a) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \sigma_{\lambda}(a) \right)$$

και την φασματική εκτίμηση:

$$r(a) := \sup_{\lambda \in \sigma_A(a)} |\lambda|.$$

Οι ποινδισμοί ορισμοί είναι ολγοθρικοί.

1.3 Αναπαράσταση Gelfand

Σημείωση: Για A πολλαπλότητα άλγεβρας να βρούμε αναπαράσταση (یعنی ότι $1 \neq 0$) σε χώρο Banach.

Υπόθεση 1.3.1: Για δακτύλιο $I \triangleleft A$ να είναι modular αν υπάρχει $u \in A$ ε.μ. $a - ua, a - au \in I \quad \forall a \in A$

1.3.1 Qpt: Έστω $I \triangleleft A$ modular σε A άλγεβρα Banach. Αν το I είναι γνήσιο τότε $\bar{I}$ είναι γνήσιο. Αν I είναι προπριέτο τότε I είναι ιδεώδες.

Απόδ.: Έστω $u \in A$ ε.μ. $a - au, a - ua \in I \quad \forall a \in A$
Για $b \in I$ το $\|u - b\| < 1$ έχουμε ότι το στοιχείο $v = 1 - u + b \in \text{Inv}(A)$.

Για $a \in A$ έχουμε $av = au + ab = au \in I$ και έπειτα $ab = -(u - au) \in I$. Συνεπώς $A = Av \subseteq I$.

Εφόσον I γνήσιο παραδίγουμε σε άτοπο και έπειτα $\|u - b\| \geq 1 \quad \forall b \in I$

Συνεπώς $u \notin \bar{I}$ και έπειτα $\bar{I}$ γνήσιο.

Αν I προπριέτο τότε $I \subseteq \bar{I} \neq A \Rightarrow I = \bar{I}$.

[Signature]

1.3.1 Λήμμα. Η ίδια συνθήκη είναι ότι :

εν I διφιλοποιεί γινόμενο ιδεώδες εν A
 υπάρχει $u \in A$ ε.ω. $a - ua / a - au \in I$ $\forall a$
 τότε $\bar{I}$ είναι επίσης γινόμενο διφιλοποιεί
 ιδεώδες εν A .

1.3.2 Λήμμα. Έστω $I \triangleleft A$ modular πομπή
 ιδεώδες εν A (A : φανερώσεια φανδενίσ οφφ),
 τότε A/I είναι σίφα.

Απόδ. Έστω $u \in A$ ε.ω. $a - au, a - ua \in I$ $\forall a$.
 Τότε $u + I$ είναι φανίδα του A/I (γιατί)
 Έστω $\varphi: A \rightarrow A/I : a \mapsto a + I$ η αντιστοιχία
 τινίδια εν έστω $J \triangleleft A/I$ Τότε $\varphi^{-1}(J) \triangleleft A$
 (γιατί).
 Αρα από φανδενίσση: $\varphi^{-1}(J) = A$ ή $\varphi^{-1}(J) = 0$.

Ενεφεύως $J = A/I$ ή $J = (0)$ (γιατί)

Αρα $u + I$ είναι ανδρί. (ήνα ιδεώδες $A/I, (0)$,
 και άρα A/I είναι σίφα :

Έστω $\varphi(a) \neq 0$ εν τήπο $J := \varphi(a) A/I$.

Εφ'όσον A/I φανδενίσση, τότε $0 \neq \varphi(a) \in J \Rightarrow$

$J \neq (0) \Rightarrow J = A/I$. Αρα $\exists b \in A$ ε.ω.

$u + I = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \Rightarrow u \cdot \varphi(a)$ αντιστοιγίσο. $\square$

Πρτ: • Αν $\varphi: A \rightarrow B$ μορφοισμός και η B μονοειδική τότε η $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \rightarrow B: (a, \lambda) \mapsto a + \lambda 1_B$ είναι ο (μονοειδικός) μονοειδικός μορφοισμός που αντιστοιχεί στην φ .

• Αν $\varphi: A \rightarrow B$ μονοειδικός μορφοισμός τότε η αντιστροφή αλγεβρών τότε:

$$\varphi(\text{Inv}(A)) \subseteq \text{Inv}(B) \text{ και } \delta_B(\varphi(a)) \subseteq \delta(a) \quad \text{fact}$$

Ορ6: Για A άλγεβρα τότε οι για αντιστρέφουσες $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι χαρακτήρες αν είναι μορφοισμοί.

Θέτουμε $\Omega(A)$: σύνολο χαρακτήρων στην A .

Πρτ Θα δείξουμε $\Omega(A) \neq \emptyset$ (π.χ. $A = M_2$ γιατί, Οότε θα περιοριζόμαστε σε A πινάκες).

13.3 Ορμ: Έστω A μονοειδική πινάκων άλγεβρα Banach.

(1) Αν $z \in \Omega(A)$, τότε $\|z\| = 1$.

(2) $\Omega(A) \neq \emptyset$ και η αντιστοίχια $z \mapsto \ker z$

είναι 1-1, οπότε στο $\Omega(A)$ θα μετριάσει ιδεώδη της A .

Απόφ: Καταρχήν επισημαίνουμε το φηγ:

$$z(a) = z(a \cdot 1) = z(a)z(1).$$

Αρα $z \neq 0 \Rightarrow z(1) \neq 0$.

Επίσης: $z(1) = z(1^2) = z(1)^2 \Rightarrow z(1) = 1 \text{ ή } 0$

Εφόσον $z \neq 0$ θα ισχύει $z(1) = 1$.

Επίσης για $z \in \mathcal{L}(A)$ και $a \in A$ έχουμε $z(a) \in \mathcal{L}_A(a)$

$$\text{Έστω } z(a) \notin \mathcal{L}_A(a) \Rightarrow \exists b \in A \text{ ε.ω. } (a - z(a))b = 1$$

$$\Rightarrow z((a - z(a))b) = z(1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(a - z(a))z(b) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z(a) - z(a)z(1))z(b) = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο.}$$

(1) Για $z \in \mathcal{L}(A)$ και $a \in A$ έχουμε $z(a) \in \mathcal{L}_A(a)$ και

άρα: $\|z(a)\| \leq r(a) \leq \|a\| \Rightarrow \|z\| \leq 1.$

Εφόσον $z(1) = 1$ τότε προκύπτει $\|z\| = 1$.

(2) Έστω $z \in \mathcal{L}(A)$. Τότε $\ker z \neq \{0\}$ (αφού $a - z(a) \in \ker z$) και επίσης $\ker z \neq A$ (αφού $z \neq 0$). Αρα $\ker z$ είναι γνήσιο.

Επίσης $\ker z \neq \{0\} = A$ (αφού κάθε $a \in A$ γράφεται ως $a = (a - z(a)1) + z(a)1$).

Αρα $\ker z$ είναι κομμοεικό.

Έστω $I \triangleleft A$ με $\ker \pi \not\subseteq I$. Τότε $I \not\subseteq \ker \pi$
 με $b \in I$. Γράφουμε $b = a + \lambda$ για κάποιο λ .
 Αν $\lambda = 0$ τότε $b = a \in \ker \pi$ άτοπο, άρα $\lambda \neq 0$.
 Άρα $1 = \frac{1}{\lambda} (b - a) \in I \Rightarrow I = A$.

(2) 1-1: Έστω $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{R}(A)$ με $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$
 Τότε $a - \pi_2(a) \in \ker \pi_2 \Rightarrow a - \pi_2(a) \in \ker \pi_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \pi_1(a - \pi_2(a)) = 0 \Rightarrow \pi_1(a) = \pi_2(a), \forall a \in A$
 $\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$

Θη1: Έστω $I \triangleleft A$ (αριστερό) τότε είναι κλειστό
 ως προς A/I κάτω. Από Θη2 θεωρούμε ότι

$A/I \cong \mathbb{C}(1+I)$ με άρα $A = q^{-1}(A/I) = A \oplus \mathbb{C}$
 για $q: A \rightarrow A/I$
 όπου $\oplus$ για διανυσματικούς χώρους.

Επομένως για κάθε $a \in A \exists! b \in I, \lambda \in \mathbb{C}$ ε.π.
 $a = b + \lambda$

Ορίζουμε $\pi: A \rightarrow \mathbb{C}: a = b + \lambda \mapsto \lambda$

Παρατηρούμε ότι $\pi = \pi \circ q$ με άρα το π ισομορφισμός
 με $\ker \pi = I$.

Τέλος: Εφόσον A πεπερασμένη, έχει κυριότητα
 (είναι με άρα $\mathcal{R}(A) \neq \emptyset$). □

1.3.4 Θpt : Έστω A μοναδιαία επίχωρα Banach

(1) Αν A μοναδιαία τότε:

$$\sigma(a) = \{ \tau(a) \mid \tau \in \Omega(A) \} \quad \forall a \in A.$$

(2) Αν A μη-μοναδιαία τότε:

$$\sigma(a) = \{ \tau(a) \mid \tau \in \Omega(A) \} \cup \{0\} \quad \forall a \in A.$$

Απόδ (1) Έχουμε ήδη δείξει " $\supseteq$ ". Για τον αντίστοιχο " $\subseteq$ " έχουμε:

Έστω $\lambda \in \sigma(a)$ τότε το δείχνει $I = (a - \lambda)A$ είναι γνήσιο (γιατί;) και έστω $M \supseteq I$ με $M \triangleleft A$ το-μικρό. Τότε $M = \ker \tau$ για $\tau \in \Omega(A)$ και αφού $\tau(a - \lambda) = 0 \Rightarrow \tau(a) = \lambda \Rightarrow \lambda \in \sigma(a)$.
 $\uparrow$
 $a - \lambda \in I \subseteq M = \ker \tau$

(2) Έστω A μη-μοναδιαία και έστω

$$\tau_a : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C} : (a, \lambda) \mapsto \lambda \quad (\tau_a \in \Omega(\tilde{A}))$$

Έστω επίσης για $\tau \in \Omega(A)$ η μοναδιαία επέκταση

$$\tilde{\tau} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C} : (a, \lambda) \mapsto \tau(a) + \lambda$$

Τότε $\tilde{\tau} \in \Omega(\tilde{A})$ και έχουμε:

$$\Omega(\tilde{A}) = \{ \tilde{\tau} \mid \tau \in \Omega(A) \} \cup \{ \tau_a \} \quad (\text{γιατί})$$

Αρα από (1):

$$\begin{aligned} \sigma(a) &\equiv \sigma_{\tilde{A}}(a) = \{ \tau(a) \mid \tau \in \Omega(\tilde{A}) \} = \{ \tilde{\tau}(a) \mid \tau \in \Omega(A) \} \cup \{ \tau_a(a) \} \\ &= \{ \tau(a) \mid \tau \in \Omega(A) \} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Περ: Από 1.3.4 έχουμε $\|z\|=1 \quad \forall z \in \mathcal{L}(A)$ και άρα
 $\mathcal{L}(A) \subseteq \{z \in A^* \mid \|z\| \leq 1\}$.

Ο χώρος $\mathcal{L}(A)$ οφειλάται με την δομή w^* -τοπολογία και καλείται χώρος παρακείμενων ή πάρτα της A .

1.3.5 Θπ: Έστω A μετρίσις άδρεια Banach.
 Τότε $\mathcal{L}(A)$ είναι τομική συμφογής χώρος Hausdorff
 Αν $n \in A$ είναι μοναδιαία τότε είναι συμφογής.

Αποδ: [τομική συμφογής σε Hausdorff επιείκη είναι
 ζωτικό έχω συμφογής τοποξία]

Επομένως $\mathcal{L}(A) \cup \{0\}$ είναι αθροιστική-κλειστό
 στην μοναδιαία φιάδα της A^* , η οποία από
 Banach-Alaogly ή Tychonoff είναι αθροιστική-
 συμφογής. Άρα $\mathcal{L}(A)$ είναι αθροιστική-τομική
 συμφογής.

Όμοιος αν A μοναδιαία τότε $\mathcal{L}(A)$ είναι αθροιστική-
 κλειστός υποχώρος στη μοναδιαία φιάδα της
 A^* (γιατί, τότε η διαφορά), και άρα επίσης
 αθροιστική- συμφογής.

□

Σημείωση: Έστω A περαδουράν άλγεβρα Banach με $\Omega(A) \neq \emptyset$. Για κάθε $a \in A$ ορίζουμε:

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C} : \hat{a}(z) = z(a)$$

ο οποίος καθότι με τα χαρακτηριστικά Gelfand του a , $\hat{a}$ έχουμε αθροιστ* τονολογία των $\Omega(A)$ είναι η αθροιστ* τονολογία που κινεί τον $\hat{a}$ συνεχ. Οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι το σύνολο $\{z \in \Omega(A) \mid |z(a)| > \varepsilon\}$ είναι αθροιστ* κλειστό και συνεπώς κλειστό ως A^* , και αθροιστ* συμπαγές υπό Banach-Alaoglu. Συνεπώς $\hat{a} \in C(\Omega(A))$.

1.3.6 Οπρ Αντιστοιχίας Gelfand.

Έστω A περαδουράν άλγεβρα Banach με $\Omega(A) \neq \emptyset$. Τότε η αντιστοιχία:

$$A \longrightarrow C(\Omega(A)) : a \longmapsto \hat{a}$$

είναι οπτική γραμμική με νόρμα $\|a\| \leq 1$ και $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$.

Αν η A έχει μονάδα τότε $c(a) = \hat{a}(\Omega(A))$.

Αν η A δεν έχει μονάδα τότε $c(a) = \hat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$.

Αποδ. Θα μόνον ότι $r(a) = \|\hat{a}\|_\infty$ από το οποίο προκύπτει $\|\hat{a}\|_\infty = r(a) \in \|a\|$. (γιατί;
Από 1.3.4:

$$A \text{ έχει μονάδα} \Rightarrow \phi(a) = \{z(a) \mid z \in R(A)\} = \hat{a}(R(A))$$

$$A \text{ δεν έχει μονάδα} \Rightarrow \phi(a) = \{z(a) \mid (z \in R(A)) \cup \{0\}\} = \hat{a}(R(A) \cup \{0\})$$

Γνωρίζουμε σε κάθε περίπτωση:

$$r(a) = \|a\|_\infty.$$

1.3.4 Οπρ: Έστω B μοναδιαία άλγεβρα Banach και $a \in B$. Έστω $A \subseteq B$ η μοναδιαία άλγεβρα Banach που παράγεται από 1 και a . Τότε η A είναι τελεωδοτική και η ενεργόνη:

$$\hat{a}: R(A) \rightarrow \phi(a): z \mapsto \hat{a}(z) := z(a)$$

είναι ομομορφισμός τοπολογικών χώρων.

Αποδ. Έχουμε $R(A)$ και $\phi(a)$ είναι συμπαγείς χώροι Hausdorff άρα να δείξουμε ότι η $\hat{a}$ είναι 1-1 και επί (γιατί). Το πρώτο ότι έχουμε $A = \overline{\text{span}} \{1, a^n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθε $z \in R(A)$ καθορίζεται από $z(a)$. Άρα η $\hat{a}$ είναι 1-1. Το επί προκύπτει από το 1.3.4.

Σημεία. Ο πυρήνας του περ/του Gelfand
καλείται rad της A και συμβολίζεται $\text{rad}(A)$

όπου: $\text{rad}(A) = \{a \in A \mid r(a) = 0\}$.

Αν $\text{rad}(A) = (0)$ τότε η A καλείται πρωταρχική
(ονόμα ο περ/τος είναι 1-1).

Αν $r(a) = 0$ τότε το $a \in A$ καλείται γεωδονικό
στον πυρήνα.

Σημεία. Έστω A άλγεβρα Banach και $a, b \in A$
έ.ω. $ab = ba$. Τότε:

(i) $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$.

Έστω B η μετρίστη άλγεβρα Banach των
συντάξεων από a και b . Τότε για τον
μετασχηματισμό $\hat{\cdot}: B \rightarrow C(\Omega(B))$ έχουμε

$$\begin{aligned} r_A(a+b) &= r_B(a+b) = \|(\hat{a} + \hat{b})\|_\infty = \\ &= \|\hat{a} + \hat{b}\|_\infty \leq \|\hat{a}\|_\infty + \|\hat{b}\|_\infty \\ &= r_B(a) + r_B(b) = r_A(a) + r_A(b). \end{aligned}$$

(στην Ανό του Beurling η φεραστική αξία
δεν αλλάζει όταν περνάμε σε υψίστο)

$$(ii) \quad r(ab) \leq r(a)r(b):$$

Obvious example:

$$\begin{aligned} r_A(ab) &= r_B(ab) = \int (\hat{a}\hat{b}) d\nu = \\ &= \int \hat{a} \hat{b} d\nu \leq \|\hat{a}\| \cdot \|\hat{b}\| = \\ &= r_B(a) r_B(b) = r_A(a) r_A(b). \end{aligned}$$

Ex. If gas particles are in two different states, the probability of finding them in the same state is zero.

Example: $A = M_2$ $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Then $r(a) = r(b) = 0$, $r(a+b) = r(ab) = 1$.
(paradox)

Προτεινόμενες Ασκήσεις.

Murphy Keyάδοιο 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14

Strung Keyάδοιο 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15

Strung Keyάδοιο 2:

1, 2, 3, 4, 5