## Ανάποδα.

~~Αντίστροφα,~~

- Έστω $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Θ.δ.ο ο $f(A)-\mu I$ δεν μηδενίζεται.

- Γράφουμε $f(A)-\mu I = f(A) - f(\lambda_0) I$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$.
- $f(A) - f(\lambda_0) I = \lim_n p_n(A)$, όπου $(p_n)$ πολ/μα με $p_n \to f - f(\lambda_0)$ ομοιομ. στο $\sigma(A)$
- Άρα $p_n(\lambda_0) \to 0$. Θέτουμε $q_n(\lambda) = p_n(\lambda) - p_n(\lambda_0)$
- $q_n \to f - f(\lambda_0)$ ομοιομ. και $q_n(\lambda_0) = 0$. $\forall n$.

- Έχουμε $f(A) - f(\lambda_0) I = \lim_n q_n(A)$ και επιπλέον $q_n(\lambda_0) = 0$ $\forall n$, οπότε $0 \in \{q_n(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma(q_n(A))$. $\forall n$, οπότε ο $q_n(A)$ όχι αντιστρ. $\forall n \Rightarrow$ ο $f(A) - f(\lambda_0) I$ όχι αντιστρ. διότι αν είχε αντίστρ. τότε:

- $B(f(A) - \mu I) = I$
- $\|I - B q_n(A)\| = \|B(B^{-1} - q_n(A))\| \leq \|B\| \|B^{-1} - q_n(A)\| =$
$\|B\| \cdot \|(f(A) - \mu I) - q_n(A)\| < 1$ για n αρκετά μεγάλο.
$\Rightarrow$ ο $B q_n(A)$ αντιστρ. $\Rightarrow q_n(A)$ αντιστρ. Άτοπο.

01/04/2015

## Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel $\mu_x$ στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$ : $U_x M_f = f(A) U_x$ $\forall f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $A U_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$)

Απ.

Έστω $x \in H$ \ {0}:

· Θεωρούμε την $\varphi_x: C(\sigma(A)) \to B(H) \to \mathbb{C}$
$f \mapsto f(A) \mapsto \langle f(A)x, x\rangle$.

Δηλ. $\varphi_x(f) = \langle f(A)x, x\rangle$.

· Τότε η $\varphi_x$ είναι γραμ. θετική μορφή, δηλ. $\forall f \geq 0 \Rightarrow \varphi_x(f) \geq 0$, αφού: $f \geq 0 \Rightarrow \exists\, g \in C(\sigma(A)) : f = g^* g$ (αν $g = g^* \Rightarrow g = \sqrt{f}$).

· Τότε $\varphi_x(f) = \varphi_x(g^* g) = \langle (g^* g)(A)x, x\rangle =$
$\langle g(A)^* g(A)x, x\rangle = \langle g(A)x, g(A)x\rangle =$
$\|g(A)x\|^2 \geq 0$.

$\Phi_c(f) = f(A)$: *-μορφ. και $(g^* g)(A) = \Phi_c(g^* g) = \Phi_c(g)^* \Phi_c(g) = g(A)^* g(A)$.

· Άρα η $\varphi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C}$ γραμ. και θετική και από Θ. Αναπ. Riesz: $\exists!$ κανονικό μέτρο Borel $\mu_x$ στο $\sigma(A)$: $\boxed{\varphi_x(f) = \int f \, d\mu_x}$ $\forall f \in C(\sigma(A))$

· Παρατηρούμε ότι η παρακάτω απεικόνιση είναι ισομετρία:
$(C(\sigma(A)), \|\cdot\|_2) \to (H, \|\cdot\|)$
$f \mapsto f(A)x$

· Πράγματι $\|f(A)x\|^2 = \langle f(A)x, f(A)x\rangle = \langle \Phi_c(f)x, \Phi_c(f)x\rangle =$
$\langle \Phi_c(f)^* \Phi_c(f)x, x\rangle = \langle \Phi_c(\bar{f})\Phi_c(f)x, x\rangle = \langle \Phi_c(\bar{f}f)x, x\rangle =$
$\langle (\bar{f}f)(A)x, x\rangle = \varphi_x(\bar{f}f) = \int \bar{f}f \, d\mu_x = \int |f|^2 d\mu_x = \|f\|_2^2$.

· Άρα επεκτείνεται σε μία ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$ με $\boxed{U_x(f) = f(A)x}$ $\forall f \in C(\sigma(A))$

- ~~Ονομάζουμε αυτή την απεικόνιση $U_x$ και $U_x(f) = f(A)x$ $\forall f \in C(\sigma(A))$~~

$U_x M_f \overset{?}{=} f(A) U_x$

- Έστω $g \in C(\sigma(A))$. Τότε $\boxed{U_x M_f : g \xmapsto{M_f} fg \xmapsto{U_x} (fg)(A)\,x = \phi_c(fg)\,x}$

και $\boxed{f(A) U_x : g \mapsto g(A)x \xmapsto{f(A)} f(A)g(A)x = \phi_c(f)\,\phi_c(g)\,x}$

- Αφού $\phi_c(fg) = \phi_c(f)\cdot\phi_c(g)$ τότε $(U_x M_f)g = (f(A)U_x)g$ $\forall g \in C(\sigma(A))$

Ταυτίζονται στον $C(\sigma(A))$ που είναι πυκνός στον $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, και είναι φραγμένες

- Άρα $\boxed{U_x M_f = f(A) U_x}$ $\forall f \in C(\sigma(A))$

- Ειδικότερα: $\boxed{f_1(\lambda) = \lambda : \quad U_x M_{f_1} = A U_x}$

Ποιο είναι το $U_x(L^2(\sigma(A), \mu_x))$;

- περιέχει το $f(A)x$ $\forall f \in C(\sigma(A))$
- περιέχει τα $x, Ax, A^2x, \ldots$
- περιέχει το $[A^n x : n \geq 0] = \{p(A) : p \in \mathcal{P}\}$.
- Είναι κλειστός στον $H$ διότι ο $L^2(\sigma(A), \mu_x)$ είναι πλήρης και η $U_x$ είναι ισομετρία.
- Περιέχει το $\overline{[A^n x : n \geq 0]}^{\|\cdot\|_H}$.

- Αντίστροφα, αν $\xi \in U_x(L^2(\sigma(A),\mu_x))$ τότε $\xi = U_x(f) = f(A)x$ για κάποια $f \in L^2(\sigma(A),\mu_x)$.

- Τότε $\exists$ πολυώνυμα $(p_n)$: $\|p_n - f\|_2 \xrightarrow[n]{} 0$ (προσεγγίζουμε την $f$ με συνεχή $g$ με την $\|\cdot\|_2$ και την $g$ με πολυώνυμα από Weierstrass ~~με~~ ομοιόμορφα και κάνουμε τριγ. ανισ.).

- Άρα ~~$U_x(L^2(\sigma(A),\mu_x))$~~ $\|U_x(p_n) - U_x(f)\| \xrightarrow[n]{} 0$, δηλ. $p_n(A)x \to f(A)x = \xi$.

- Άρα $U_x(L^2(\sigma(A),\mu_x)) = \overline{[A^n x : n \geq 0]}^{\|\cdot\|_H} = \{p(A)x : p \in \mathcal{P}\}$.

- $\boxed{\text{Άρα η } U_x \text{ είναι επί} \Leftrightarrow \forall\ \xi \in H\ \exists\ (p_n)_n \text{ πολυώνυμα ώστε } \|\xi - p_n(A)x\| \xrightarrow[n]{} 0 \Leftrightarrow [A^n x : n \geq 0] \text{ πυκνό στο } H.}$ ~~$\|\xi - p_n(A)x\| \to 0$~~

## Συμπέρασμα

Αν $\exists\ x \in H$: (*) $[A^n x : n \geq 0]$ πυκνό στο $H$, τότε ο $U_x$ είναι ισομετρία επί και άρα unitarily ισοδύναμος με τον $M_{f_1}$ στον $L^2(\sigma(A),\mu_x)$.

## Ορισμός

- Το $x$ λέγεται κυκλικό για τον $A \Leftrightarrow$ (*)

- Το $x$ λέγεται υπερκυκλικό για τον $A \Leftrightarrow \{A^n x : n \geq 0\}$ πυκνό στο $H$.

Π.χ

1) $H = L^2([0,1])$ , $(Af)(t) = tf(t)$ , $f \in H$

Ισχυρισμός

Το $\xi(t) = 1$ $\forall t$ είναι κυκλικό για τον $A$.

- $[A^n \xi ; n \geq 0] = \{ p(A)\xi : p \in \mathcal{P} \}$.

- $(p(A)\xi)(t) = p(t)\xi(t) = p(t)$ $\forall t \in [0,1]$ , δηλ. $p(A)\xi = p$ και άρα το $\{ p(A)\xi : p \in \mathcal{P} \}$ είναι πυκνό στον $L^2([0,1])$.

2) $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1]) = \{ f \oplus g : f, g \in L^2([0,1]) \}$.

Επίσης $\langle f \oplus g , f' \oplus g' \rangle = \langle f, f' \rangle + \langle g, g' \rangle$.

- Θέτουμε $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = f \oplus g$.

- Τότε $B \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{t} f \\ M_{t} g \end{bmatrix}$ όπου $(M_{t} f)(t) = tf(t)$ $\forall t \in [0,1]$,

με $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

- Ο $B$ δεν έχει κυκλικό διάνυσμα, δηλ. $\forall \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in H$ το $[ B^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} : n \geq 0 ]$ δεν είναι πυκνό. διότι

$\langle B^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \rangle = 0$ $\forall n$ και $\begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \neq 0$.

Απ.

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} A^n f \\ A^n g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \right\rangle = \langle A^n f, \bar{g} \rangle + \langle A^n g, -\bar{f} \rangle =$$

$$\int t^n f(t) g(t)\, dt - \int t^n g(t) f(t)\, dt = 0.$$

- $L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1]) \approx L^2([0,2])$

$$f \oplus g \mapsto h$$

με $h(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,1] \\ g(t-1), & t \in [1,2]. \end{cases}$

Για την γενική περίπτωση:

- Ξεκινάμε από ένα $x_1$ με $\|x_1\| = 1$.
- Δημιουργούμε $U_{x_1} : L^2(\sigma(A), \mu_{x_1}) \to H_{x_1} \subset H$, $H_{x_1} = \overline{[A^n x_1 : n \geq 0]}$
- Αν $H_{x_1} = H$, τελειώσαμε.
- Αν όχι, παίρνουμε $x_2$, με $\|x_2\| = 1$ με $x_2 \perp H_{x_1}$.
- Παρατηρούμε ότι $A^n x_2 \perp H_{x_1}$ $\forall n$ αφού $\langle A^n x_2, A^m x_1 \rangle \overset{A=A^*}{=}$ $\langle x_2, \underbrace{A^{m+n} x_1}_{H_{x_1}} \rangle = 0$. και άρα $H_{x_2} \perp H_{x_1}$.
- Άρα έχουμε $U_{x_2} : L^2(\sigma(A), \mu_{x_2}) \to H_{x_2}$. και άρα

$$L^2(\sigma(A), \mu_{x_1}) \oplus L^2(\sigma(A), \mu_{x_2})$$

$$\Big\downarrow U_{x_1} \oplus U_{x_2}$$

$$H_{x_1} \oplus H_{x_2}.$$

- Αν $H_{x_1} \oplus H_{x_2} = H$, τελειώσαμε.
- Αν όχι, συνεχίζουμε: $x_3$, $\|x_3\| = 1$, $x_3 \perp H_{x_1} \oplus H_{x_2}$. κ.ο.κ.

- Έστω $A$ ~~...~~ normal $(AA^* = A^*A)$.
- Είναι αναγκαία υπόθεση ώστε να ισχύει η σχέση $A = UM_f U^{-1}$ για $U$ unitary, αφού $\forall f \in L^\infty(X,\mu)$ ο $M_f$ είναι φυσιολογικός.

- $A^*A = (UM_fU^{-1})^*(UM_fU^{-1}) = (UM_fU^*)^*(UM_fU^*) =$
$U^{**}M_f^* U^*U M_f U^* = UM_f^* M_f U^*$

- $AA^* = UM_fU^*UM_f^*U^* = UM_fM_f^*U^*$

και $M_f M_f^* = M_f^* M_f$ αφού $M_f^* = M_{\bar f}$.

- $A = A_1 + iA_2$ με $A_1 = \frac{A+A^*}{2}$, $A_2 = \frac{A-A^*}{2i}$

- $\boxed{A \text{ normal} \iff A_1A_2 = A_2A_1}$ (εύκολο)

- $A_1 \sim M_f$ στον $L^2(X,\mu)$
$A_2 \sim M_g$ στον $L^2(Y,\nu)$
με κάποιο τρόπο: $M_f + iM_g$ σε κάποιο $L^2(Z,\lambda)$
$\wr ?$
$A_1 + iA_2$. (Halmos)

<u>(Άλλος τρόπος)</u>

- $A$ normal, θεωρούμε $p(z,\bar z) = \sum c_{k,n} z^k \cdot \bar z^n \rightsquigarrow$
~~$p(A,A^*) = \sum c_{k,n} A^k A^*$~~ $p(A,A^*) = \sum c_{k,n} A^k (A^*)^n$.

Κρίσιμο Λήμμα:

→ $\|p(A, A^*)\| = \sup\{|p(\lambda, \bar{\lambda})| : \lambda \in \sigma(A)\}$

???

Θεώρημα Gelfand

→ $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

02/04/2015

<u>Υπενθύμιση</u>

- $\forall x \in H \setminus \{0\}$, $A = A^*$ φτιάξαμε:

$$\begin{tikzcd} L^2(\sigma(A), \mu_x) \arrow[r, "U_x"] \arrow[d, "M_f"'] & H \arrow[d, "A"] \\ L^2(\sigma(A), \mu_x) \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

- Σύνολο τιμών $U_x(L^2(\sigma(A)), \mu_x) = \overline{[A^n x : n \geq 0]}$ $\overset{\|}{H_x}$.

- Όταν $\exists\, x \in H$ · κυκλικό για τον $A$: $H_x = H$, τότε $U_x$ · είναι επί, άρα unitary $\Rightarrow \boxed{A = U_x M_f U_x^{-1}}$

<u>Λήμμα</u>

$H = \bigoplus_{i \in I} H_i$, όπου $H_i$ κάθετοι ανά δύο, κυκλικοί και $A$-αναλλοίωτοι, δηλ $\forall H_i$, $A(H_i) \subset H_i$ και $\exists\, x_i \in H_i$: $H_i = \overline{[A^n x_i : n \geq 0]}$

<u>Απ.</u>

- Έστω $x \in H \setminus \{0\}$. Θέτουμε $H_x = \overline{[A^n x : n \geq 0]}$, που είναι $A$-κυκλικός εξ ορισμού.

- Επίσης $A(H_x) \subset H_x$ και $A(A^n x) = A^{n+1} x \in H_x$
- <u>γραμ:</u> $A[A^n x : n \geq 0] \subset H_x$
- <u>συν:</u> $A(H_x) \subset H_x$
- Ονομάζουμε $x, y \in H \setminus \{0\}$ <u>πολύ κάθετα</u> αν $H_x \perp H_y$.

$\Leftrightarrow A^n x \perp A^m y \quad \forall n,m \in \mathbb{N}.$

Ισχυρισμός

$\exists$ μεγιστική οικογ. $\{x_i : i \in I\}$ πολύ κάθετων διανυσμάτων

Απ.

- Θεωρούμε όλες τις οικογένειες των πολύ κάθετων διαν. με διάταξη την σχέση $\subseteq$.

- Αν $C$ είναι μία αλυσίδα από τέτοιες οικογένειες, τότε η $C$ έχει άνω φράγμα το $\cup C$.

- Από το λήμμα του Zorn $\exists$ μεγιστικό στοιχείο, δηλ. $\exists$ οικογένεια που αποτελείται από πολύ κάθετα διαν.

- Ονομάζουμε $H_i = \overline{[A^n x_i : n \geq 0]}$ κυκλικοί και $A$-αναλ., $\perp$ ανά δύο.

Ισχυρισμός

$$\bigoplus_{i\in I} H_i = H$$

$$\|$$

$\bigvee_{i\in I} H_i \equiv$ ο μικρότερος κλ. υπόχωρος που $\supseteq$ κάθε $H_i$.

Απ.

- Έστω όχι: $\exists\, x \in H \setminus \{0\}$, $x \perp \bigoplus_{i\in I} H_i$, δηλ. $x \perp H_i$, $\forall i$, τότε όμως

$$\forall n,m \in \mathbb{N},\ \forall i,\ \langle A^n x, A^m x_i \rangle = \langle x, \underset{\substack{\Uparrow \\ H_i}}{A^{m+n} x_i} \rangle = 0$$

- Άρα $\{x, x_i : i \in I\}$ ορθ. από πολύ κάθ. διαν και ⊃ $\{x_i : i \in I\}$. Άτοπο.

Έχουμε το εξής:

$$\begin{array}{ccc} H & = & \oplus H_i \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ H & = & \oplus H_i \end{array}$$

Σημείωση:

- Από εδώ και το εξής υποθέτουμε ότι ο $H$ είναι διαχωρίσιμος
- Ο πότε η ορθ. $\{x_i : i \in I\}$ είναι αριθμήσιμη και γράφουμε $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

- Άρα $\oplus H_k \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Ax_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$.
  με $\sum \|x_k\|^2 < \infty$

- Άρα $A \sim \begin{bmatrix} A|_{H_1} & & 0 \\ & A|_{H_2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$, $A|_{H_i} \overset{\text{Unitarily}}{\sim} M_{f_i}$

Άσκηση

Ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε $H_i$ είναι το σύνολο $\{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ όπου $\sum \|x_k\|^2 < \infty \ \forall x_k \in H_k\}$.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε μέτρο $\mu_k$ στο $\sigma = \sigma(A)$ και ένα unitary $U_k : L^2(\sigma, \mu_k) \to H_k : U_k M_{f_k} = A U_k$ (1)
  όπου $f_k(\lambda) = \lambda \ \forall \lambda \in \sigma$, $f_k \in L^\infty(\sigma, \mu_k)$.

Θα φτιάξουμε $\oplus U_x : \oplus L^2(\sigma, \mu_x) \to \oplus H_x$.

- $\oplus L^2(\sigma, \mu_x) :=$ ε} ορισμού ευθύ άθροισμα $:= \{ (g_x)_x : g_x \in L^2(\mu_x)$ και $\sum \|g_x\|^2_{\mu_x} < \infty \}$.

- $\langle (g_x), (g'_x) \rangle := \sum_{x=1}^{\infty} \langle g_x, g'_x \rangle_{\mu_x}$ ~> έχουμε χώρο Hilbert.

- Άρα $\oplus U_x : \oplus U_x (g_x) = \sum_{x=1}^{\infty} U_x(g_x)$.

__Παρατήρηση__

- Η σειρά συγκλίνει διότι τα $U_x(g_x) \perp U_n(g_n)$ και $\sum \|U_x(g_x)\|^2 = \sum \|g_x\|^2 = \|(g_x)\|^2$.

- Μάλιστα η $\oplus U_x$ είναι ισομετρία. Επιπλέον είναι επί αφού το σύνολο τιμών $\oplus U_x(L^2(\mu_x)) = \oplus H_x$.

- Έστω $U = \oplus U_x$.
- Τότε $AU((g_x)) = A\left(\sum U_x(g_x)\right) = \sum AU_x(g_x) \overset{①}{=} \sum U_x(M_{f_x}(g_x)) = \sum U_x(f_x g_x) = U((f_x g_x))$

- $(g_x) \in \oplus L^2(\mu_x)$
- $(f_x g_x) \in \oplus L^2(\mu_x)$ διότι $\sum \|f_x g_x\|^2 \leq \sup \|f_x\|^2_\infty \sum \|g_x\|^2 = \|A\| \sum \|g_x\|^2$, διότι $\forall$ $f_x$ είναι $f_x(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \sigma(A)$, άρα $\|f_x\|_\infty = \sup\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$

__Στόχος__

Να βάλουμε $\oplus L^2(\sigma, \mu_x) \subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$ για κάποιο $\mu$.

## Παρατήρηση

- $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$, $a := 3\|A\|$
- Ορίζουμε $X_k = \sigma(A) + ka = \{\lambda + ka,\ \lambda \in \sigma(A)\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

- Βλέπουμε ότι $X_k$ είναι ξένα ανά δύο κλειστά $\subset \mathbb{R}$.
- $\forall Y \subset \mathbb{R}$ Borel ορίζουμε $\mu(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k((Y \cap X_k) - ka)$.

  → αφού κάθε $\mu_k$ πεπερ.
- Είναι προφανές ότι το $\mu$ είναι σ-πεπερ. μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$

- $\forall k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε
$$W_k : L^2(\mathbb{R}, \mu) \longrightarrow L^2(\sigma(A), \mu_k)$$
$$g \longmapsto W_k g.$$

με $(W_k g)(\lambda) = g(\lambda + ka)$, $\lambda \in \sigma(A)$.

## Ισχυρισμός

Η $W_k$ είναι γραμ., επί και $\|W_k g\|_{\mu_k} = \|g|_{X_k}\|_\mu$.

Επί: Έστω $h \in L^2(\sigma, \mu)$. Θέτουμε $g(t) = \begin{cases} h(t-ka), & \text{αν } \exists k : t \in X_k \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

- $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 d\mu(t) = \int_{X_k} |h(t-ka)|^2 d\mu(t) = \int_{\sigma} |h(\lambda)|^2 d\mu_k(\lambda) < \infty$

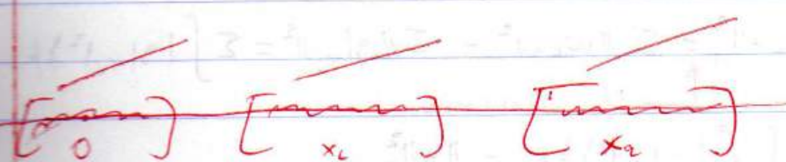
και $W_k g = h$.

- $\|W_k g\| = \|g|_{X_k}\|_\mu$: Έστω $g = g|_{X_k} + g|_{X_k^c} = g_1 + g_2$.

- $\|g\|^2 = \|g|_{X_k}\|^2 + \|g|_{X_k^c}\|^2$, $W_k g_2 = 0$ διότι η $g_2$ μηδενίζεται στο $X_k$, άρα $\|W_k g\| = \|W_k g_1\| \overset{?}{=} \|g_1\|$

- Έστω $g_1 = \chi_Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ Borel. Ισχύει $Y \subset X_k$ (σχεδόν)
- $W_k \chi_Y = \chi_{Y_k}$, $Y_k = \{\lambda - ka : \lambda \in Y\}$.
- $\|W_k \chi_Y\|^2 = \|\chi_{Y_k}\|^2 = \mu_k(Y_k) = \mu(Y) = \|\chi_Y\|^2$.
- Ομοίως για απλές μετρήσιμες που είναι πυκνές στον $L^2(\mathbb{R},\mu)$.
- Τώρα, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k : \sigma \to \sigma$, $f_k(\lambda) = \lambda$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

με $f(t) = \begin{cases} f_k(t - ka), & \text{αν } \exists k : t \in X_k \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$




- Προφανώς η $f$ είναι φραγμένη μετρήσιμη $\Rightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$
- $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t\}$

Ισχυρισμός

$\forall k$, $W_k M_f = M_{f_k} W_k$ (3)

Απ.

$\forall g \in L^2(\mathbb{R},\mu)$, $\lambda \in \sigma(A)$, $(W_k M_f g)(\lambda) = (W_k f g)(\lambda) =$
$(fg)(\lambda + ka) = f(\lambda + ka) \cdot g(\lambda + ka) = f_k(\lambda)\, g(\lambda + ka) = f_k(\lambda)(W_k g)(\lambda)$
$= (M_{f_k} W_k g)(\lambda)$. $\forall k$.

Αρχική σχέση:

- $U_x M_{f_x} = A U_x \quad \forall x$

- Άρα από την ③ $\rightsquigarrow$ $U_x W_x f = U_x (M_{f_x} W_x) = A U_x W_x \ \forall x.$

$\Rightarrow (U_x W_x) M_f = A (U_x W_x)$

$\Big\downarrow$ θ.ξ.ο

$$\boxed{\left(\bigoplus U_x W_x\right) M_f = A \left(\bigoplus U_x W_x\right)}.$$

Ισχυρισμός

$\forall g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, $\sum \| U_x W_x g \|_H^2 = \| g \|_\mu^2$.

Απ.

$$\sum \| U_x W_x g \|_H^2 \underset{\uparrow}{=} \sum \| W_x g \|^2 = \sum \| g|_{X_x} \|^2 = \sum \int | g|_{X_x} |^2 d\mu$$

$U_x$ ισομετρία

Beppo-Levi:
$$= \int \underbrace{\left( \sum_{x=1}^{\infty} | g|_{X_x} |^2 \right)}_{|g|^2} d\mu = \| g \|_\mu^2 .$$

- Επειδή τα $U_x W_x g$ είναι κάθετα ανά δύο $U_x (L^2(\mu_x)) \subset H_x$, η ~~πότε~~ παραπάνω ισότητα δείχνει ότι $\sum U_x W_x g$ συγκλίνει στον $H$. και $\| \sum U_x W_x g \|_H^2 = \sum \| U_x W_x g \|_H^2 = \| g \|_\mu^2$.

Συνοψίζοντας: ο τελεστής $W : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to H$

$g \longmapsto \sum U_x W_x g$

είναι καλά ορισμένος, ισομετρία και το σύνολο τιμών του περιέχει το σύνολο τιμών κάθε $U_x W_x$.

- Όμως ο $W_x$ είναι επί, άρα το $\Sigma$ περιέχει κάθε $U_x(L^2(\sigma,\mu_x))$.
- Επίσης το $\Sigma$ είναι κλειστός υπόχωρος διότι $W$ ισομετρία $\Rightarrow$ $\Sigma = \bigoplus H_x = H$ $\Rightarrow$ $W$ unitary. και ισχύει $WM_f = AW$ διότι $\forall g$: $WM_f g = \Sigma U_x W_x M_f g = \Sigma U_x M_{f_x} W_x g = \Sigma A U_x W_x g = A\left(\Sigma U_x W_x g\right) = A(W g)$.
- Άρα $\forall A = A^* \in B(H)$, διαχωρίσιμο $H$ φτιάξαμε $\mu$ Borel στο $\mathbb{R}$ και μία $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$ : $A \overset{\text{unitarily}}{\sim} M_f$ μέσω $W$.