Θεωρία Τελεστών

Π.χ

$T: f \longrightarrow a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$ (Διαφορικός Τελεστής)

a_i : καλές συναρτήσεις

που ορίζεται ο T; • f τουλ. δύο φορές παραγωγίσιμη

Παράγωγος με ασθενή έννοια

$f \mapsto f'$: $\int f' g = -\int f \cdot g'$.

Έχουμε $\int f' g = [fg]_{-\infty}^{\infty} - \int f \cdot g'$. Οπότε θέλουμε $g \in C_0^1(\mathbb{R})$.

Π.χ

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$$

T : γραμμική

Π.χ

~~$T: f \mapsto \int$~~

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)\cdot f(y)\,dy$$ για g: "καλή" συνάρτηση 2π-περιοδική

- Για $f_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$
- $$(Tf_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y)\cdot e^{in(x-y)}\,dy = e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y)\cdot e^{-iny}\,dy = e^{inx}\cdot \hat{g}(n)$$

$$\Rightarrow (Tf_n)(x) = e^{inx}\cdot \hat{g}(n) = f_n(x)\cdot \hat{g}(n)$$

$$T\begin{pmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \hat{g}(-1) & & 0 \\ & & \hat{g}(0) & \\ & 0 & & \hat{g}(1) \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

⇝ Διαγωνοποιήθηκε ο T

- Κεντρικό ερώτημα "Πότε διαγωνοποιείται ένας μετασχηματισμός;"

- $\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n \cdot \overline{f_m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$

- Τα f_j είναι γρ. ανεξ αφού αν $\sum a_i \cdot f_i = 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{\langle \textstyle\sum a_i f_i, f_j \rangle}_{= \langle 0, f \rangle = 0} = \sum a_i \langle f_i, f_j \rangle = a_j$$

$\leadsto a_j = 0 \ \forall j$.

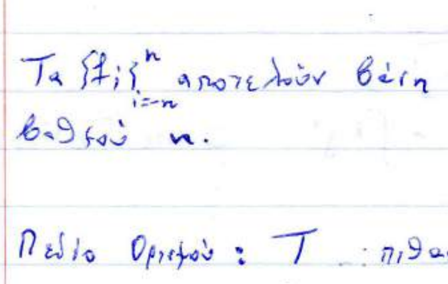
- Τα $\{f_i\}_{i=-n}^{n}$ αποτελούν βάση του χώρου T_n: $T \in T_n$ τριγ. πολ. βαθμού n.

- Πεδίο Ορισμού: T πιθανόν να είναι το $C_p([0,2\pi])$ - συνεχείς και 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Θεώρημα (Fejer)

$\forall f \in C_p([0,2\pi])$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ T τριγ. πολυώνυμο: $\|f - T\|_\infty < \varepsilon$.

- $(C_p([0,2\pi]), \|\cdot\|_2)$ όχι πλήρης



$\leadsto \|f_n - f_m\|_2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$

και $f_n \to f$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ και f δεν είναι συνεχής.

$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \pi \\ 1, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

Χώροι Hilbert

H: i) μιγ. χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο :

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, x') \to \langle x, x' \rangle$$

1 • $\langle x+\lambda x', y \rangle = \langle x,y \rangle + \lambda \langle x', y \rangle$

2 • $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$

3 • $\langle x,x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$

4 • $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

• $1,2,3 \Rightarrow |\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$

$\Rightarrow \|x+\lambda y\| \leq \|x\| + \lambda \|y\|$

$+4 \Rightarrow \|\cdot\|$ νόρμα

$\Rightarrow \delta(x,y) = \|x-y\|$ μετρική

ii) $(H, \|\cdot\|)$ πλήρης μ.χ

Σκοπός μας είναι να ξεκινάμε από χώρους που συνήθως δεν είναι πλήρεις και να κατασκευάζουμε την πλήρωσή τους.

• Αν έχουμε το λεγόμενο ημι-εσωτερικό γινόμενο (ιδιότητες **1,2,3**) δλδ $\langle x,x \rangle = 0 \not\Rightarrow x = 0$.

• Θέτουμε $N = \{x \in H : \langle x,x \rangle = 0\}$: γραμ. υπόχωρος του H, $= \{x \in H : \langle x,y \rangle = 0 \ \forall y \in H\}$ λόγω της Cauchy-Schwarz

• Στον χώρο πηλίκο $\boxed{H/_N = \{\tilde{x} = x+N : x \in H\}}$ επάγεται εσωτ. γινόμενο $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \langle x,y \rangle \ \forall x,y \in H$ και $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 0 \Rightarrow \langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x \in N$

$\tilde{x} = \tilde{0}$ ✓.

Π.χ

H : R-ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$

- $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot\overline{g(t)}\,dt \Rightarrow \langle f,f\rangle = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$.

- Πότε $\langle f,f\rangle = 0$; ⇝ Αν $f \equiv 0$ σ.π.

- Άρα ορίζουμε $N = \{f : f \equiv 0 \text{ σ.π}\}$ ώστε ο χώρος $H/_N$ είναι χώρος με εσωτ. γιν. που δεν είναι πλήρης

(Δώστε παράδειγμα)

- $\tilde{f} \in H/_N$ αν $\exists\, g$ R-ολοκλ. και $g = f$ σ.π.

- Η πλήρωση του $H/_N$ είναι ο $L^2([0,1])$.

- $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \ : f$ μετρήσιμη και $\int |f(x)|^2 d\mu <$
- f μετρήσιμη $\iff f^{-1}(V) \in \mathcal{A}\ \forall\, V$ ανοικτό στο $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow |f|^2$ μετρήσιμη, άρα το $\int |f|^2 d\mu$ ορίζεται

- Άρα $N = \{ f \in \mathcal{L}^2 : \int |f|^2 d\mu = 0\} = \{ f \in \mathcal{L}^2 : f \equiv 0 \ \mu\text{-σ.π}\}$.

Άρα $\boxed{L^2(X,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^2(X,\mathcal{A},\mu)/_N}$

- Θεώρημα Riesz

Ο $(L^2, \|\cdot\|_2)$ είναι πλήρης.

- Οι απλές και ολοκλ. συναρτήσεις είναι πυκνός υπόχωρος, δηλ. $\forall f \in L^2\ \exists\, (f_n)_n$ από απλές και ολοκληρώσιμες : $\|f_n - f\|_2 \to 0$

Αντιπαράδειγμα

$f(x) = \begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & |x|>1 \end{cases}$. Τότε $f\in C_0(\mathbb{R})$ ενώ $f\notin L^2(\mathbb{R})$

π.χ

- Αν $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R}, m)$ m-Lebesgue, τότε $C_0(\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} :$ f συνεχής και $\lim_{|t|\to\infty}|f(t)| = 0\}$ είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R}, m)$
- Το ίδιο και για το $C_c(\mathbb{R})$: συνεχείς με συμπαγή φορέα.
- $C_c^{\infty}(\mathbb{R})\ C_c(\mathbb{R})$ [illegible] $\subset L^2(\mathbb{R})$.

  πυκνός

  πυκνός
- $\operatorname{supp} f = \overline{\{ t\in\mathbb{R} : |f(t)|\neq 0\}}$ συμπαγές $\iff \exists N\in\mathbb{N} : |f(t)| = 0 \ \forall |t|>N$.
- $\lim_{|t|\to\infty}|f(t)| = 0 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists K_f$ συμπαγές : $|f(t)|<\varepsilon \ \forall t\notin K_f$.

26/02/2015

Θεώρημα Riesz

Ο χώρος $(L^2(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Hilbert (ως προς $\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}\, d\mu$)

Λήμμα

Αν $(E,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, τότε είναι πλήρης $\iff$ κάθε απολύτως αθροίσιμη σειρά συγκλίνει.

- Δ/Σ αν $(x_n)_n \subset E$ με $\sum\|x_n\|<\infty$, τότε $\exists\, x\in E$ ώστε $\|x-\sum_{k=1}^{n} x_k\| \xrightarrow[n]{} 0$

Απ. (Απίστευτο)

$\Rightarrow$ Έστω $\sum \|x_n\| < \infty$ και έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.
Για $n > m$ $|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} x_k| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \infty$. Για $\varepsilon > 0$
$\exists\, m_0 : n \geq m \geq m_0 \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$. Άρα (s_n) βασική $\Rightarrow s_n$ συγκλίνει

$\Leftarrow$ Έστω $(x_n) \subset E$ βασική. Αρκεί να βρούμε υπακολουθία που σ
Από τον ορισμό $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $\|x_{k_n} - x_{k_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n}$.
Έστω $y_n = x_{k_n}$. Θέτουμε $z_n = y_n - y_{n+1}$, $y_0 = 0$.
Οπότε $\sum_{k=0}^{n} z_k = y_n - y_0 = y_n$.

Αφού $\sum_{k=0}^{n} \|z_k\| = \sum_{k=0}^{n} \|y_k - y_{k+1}\| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \le 1$. Άρα
$\sum_{k=0}^{n} \|z_k\| \le 1 < \infty$.

Άρα $\sum_{k=0}^{n} z_k < \infty \Rightarrow (y_n)$ συγκλίνει.

Απ. Riesz

- Έστω $(f_n) \subset L^2$ ώστε $\sum \|f_n\|_2 = M < \infty$. N.S.o
$\exists\, f \in L^2$ ώστε $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$).

- Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$. Τότε $\|g_n\|_2 \le \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2 = M$, δηλ.
$(g_n) \subset L^2$.

- Επίσης $(g_n) \uparrow$ οπότε $\forall x \in X$ $\exists \lim_n g_n(x) = g(x)$.
- Η $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη, άρα η g^2 επίσης
και από Θ.Μ.Σ ($g_n^2 \uparrow g^2$ και $\|g_n\|_2^2 \le M^2$) έχουμε
$g \in L^2$.
- Αν $t \in X$ ώστε $g(t) < \infty$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \le g(t) \Rightarrow$

η $\sum_{\kappa=1}^{n} f_\kappa(t)$ συγκλίνει σε κάποιο $s(t)$. με $s(t) = \begin{cases} \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(t), & g(t)<\infty \\ 0, & g(t)=\infty. \end{cases}$

- Άρα η s είναι μετρήσιμη και $|s(t)| \le g(t)$ $\forall t \in X$ και από Θ.Κ.Σ $s \in L^2$.

- Μένει ν.δ.ο $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} s$, $|s| \le g$, $|s_n| \le g \Rightarrow |s_n - s|^2 \le |2g|^2 \Rightarrow$ $\|s_n - s\|_2^2 \le 4\|g\|_2^2$ και $s_n \to s$ κ.σ.

Από Θ.Κ.Σ $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} s$.

Νόρμα Τελεστή

$\|T\| = \inf\{M>0 : \|Tx\| \le M\|x\| \ \forall x\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\|=1\}$.

Παρ. Τελ. στον L^2

Έστω $h: X \to \mathbb{C}$ φραγμένη και μετρήσιμη.

$M_h : f \longmapsto hf$ (κατά σημείο)

Ισχ: i) $\forall f \in L^2$ η $hf \in L^2$. (προφανώς αφού h φραγμένη)

ii) $\exists M : \forall f \in L^2$, $\|hf\|_2 \le M\|f\|_2$ δλδ $\|M_h\| < \infty$. (Φραγμ.)

- Δλδ αν $M = \|h\|_\infty$, τότε $\|M_h\| \le \|h\|_\infty$
  - Στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα. (σε σ-πεπ. χώρους μέτρου)
  - Δεν χρειάζεται η h να είναι παντού φραγμένη αλλά ουσιωδώς φραγμένη.

- Δλδ ορίζουμε $\boxed{\|h\|_\infty \equiv \operatorname{ess\,sup}|h| = \inf\{M>0 : m(\{|h|>M\})=0\}}$
$= \sup\{M>0 : |h| \le M \text{ σ.π}\}$.

• $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu) = \{h : X \to \mathbb{C}$ μετρ. + ουσ. φρ-γμ.$\}$.

• $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu) = \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)/\mathcal{N}$ με $\mathcal{N} = \{h : X \to \mathbb{C}$ μετρ. και ; σ.

• Αποδεικνύεται ότι $(L^\infty(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_\infty)$ πλήρης (~~ομοίως~~ όπως για τον $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$).

Π.χ

• Αν $a \in \ell^\infty$ τότε $\forall x \in \ell^2$, $D_a(x) = ax \in \ell^2$.
και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$

?? { • Αντίστροφα αν D_a είναι φραγμένος τότε $a \in \ell^\infty$.
$D_a : x \mapsto ax : \ell^2 \to$;

Ερώτηση

• Αν ~~a~~ δεν είναι φραγμένη, $\exists x \in \ell^2$ ώστε $ax \notin \ell^2$;

Ισοδύναμα

• Αν $ax \in \ell^2\ \forall x \in \ell^2$ τότε $a \in \ell^\infty$;

Απάντηση

Ναι

• Ομοίως

Αν (X,μ) χώρος σ-πεπερ. μέτρου ~~τότε $f \in L^2$~~ και $h : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη με $\boxed{f \in L^2 \Rightarrow hf \in L^2}$. Τότε $\boxed{h \in L^\infty}$

ισοδύναμα

• h ουσ. φραγμένη • M_h ορίζεται και είναι φραγμένος

• $M_h(L^2) \subset L^2$. • $\boxed{\text{Π.Ο } M_h \sim L^2}$

Μη φραγμένος τελεστής (Παράδειγμα)

- $C_{00} = \{ (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C}$ και $\exists\, n_x \in \mathbb{N} : x(n) = 0 \ \forall n > n_x \}$.
- $\langle x, y \rangle = \sum x(n) \cdot \overline{y(n)}$ (πεπερ. άθροισμα)

$\Downarrow$

$\|x\|_2 = \left(\sum |x(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- Παίρνουμε τώρα $a(n) = n$ και $D_a(x) = (n \cdot x(n))$. Ο D_a ~~είναι~~ δεν είναι φραγμένος τελεστής αφού $\frac{e_n}{n} = (0, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots 0) \xrightarrow[n]{} 0$ ενώ $D_a\left(\frac{e_n}{n}\right) = (0, \ldots, 1, \ldots 0) \not\to 0$
- Το πρόβλημα είναι να βρούμε μη φραγμένο τελεστή σε πλήρεις χώρους.

Χώρος του Hardy

Ο χώρος του Hardy $\boxed{\text{συμβ. } H^2}$ αποτελείται από τις $f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ $((c_n) \in \ell^2)$

- Κάθε τέτοια δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης ≥ 1
- Άρα η f είναι ολόμορφη στον δίσκο $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$.
- Ο H^2 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
- $\forall (a_n) \in \ell^2$ ορίζουμε $f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$
- Η $a \longmapsto f_a$ είναι γραμμική ισομετρία και επί εξ' ορισμού του H^2.

Ορίζουμε T τον τελεστή με $f \in H^2$: $(Tf)(z) = z f(z)$.

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow (Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{n+1}$

- $\|Tf\|_{H^2}^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + \dots = \|f\|_{H^2}^2$. ~~=> καλά ορισμένη, ισομετρία~~
- Άρα η T είναι καλά ορισμένη, ισομετρία αλλά όχι επί αφού για $f_0(z)=1 \ \forall z$ έχουμε $f_0 \in H^2$.

και $\nexists \, f \in H^2 : (Tf)(z) = f_0(z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r] & f_a & \\
e_n \arrow[d] & \ell^2 \arrow[r, "V"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^2 \arrow[d, "T"] & f_n(z) = z^n \arrow[d] \\
e_{n+1} & \ell^2 \arrow[r, "V"'] & H^2 & f_{n+1}
\end{tikzcd}$$

S: shift operator.

$\Rightarrow \boxed{T = VSV^{-1} \text{ ή } TV = VS}$

- $S(a(0), a(1), \dots) = (0, a(0), a(1), \dots)$
- $T(a(0)z^0 + a(1)z + \dots) = (0 + a(0)\cdot z + a(1)z^2 + \dots)$

- Ορίζουμε $M_n = \overline{[e_n, e_{n+1}, \dots]}^{\|\cdot\|_2}$.
- Τότε $\ell^2 = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$
- Οπότε $S(M_n) \subset M_n \Rightarrow M_n$ είναι S-αναλλοίωτοι

Θεώρημα

Κάθε T-αναλλοίωτος κλειστός υπόχωρος M του H^2 είναι της μορφής $M = \{hf : f \in H^2\}$ όπου $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη (είναι φραγμένη) με $|h(e^{i\theta})| = 1$ σχεδόν $\forall \theta$.

Παρ. (Ολοκληρωτικοί Τελεστές)

$K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ συνεχής. και $\forall f \in C([0,1])$ ορίζουμε

$$\boxed{(C_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)\cdot f(y)\, dy}$$

- Αν δουλεύουμε στο $\mathbb{N}^2$ για είχαμε $k : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ και
$(C_k f)(n) = \sum_m k(n,m) \cdot f(m) = [k][f]$
↳ πολλαπλ. πινάκων.

- $C_n f$ είναι συνεχής άρα $C_n f \in L^2([0,1])$

- $\|C_n f\|_2 \le \|k\|_{22}^2 \cdot \|f\|_2$, $\boxed{\|k\|_{22} = \left(\iint |k(x,y)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}}$

- Άρα ο $C_k : (C([0,1]), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος τελεστής

- Γενικότερα, λόγω πυκνότητας $(C([0,1])$ $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ οπότε (Fubini) $\forall f \in L^2([0,1])$, $C_k f \in L^2([0,1])$

- Άρα $\boxed{C_k : L^2 \to L^2 \text{ φραγμένος τελεστής}}$

04/03/2015

Χώροι Hilbert

~~Αν H~~

Αν H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A \subset H$, τότε το σύνολο $A^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \;\forall y \in A\}$ είναι πάντα κλειστό σύνολο.

Θεώρημα

Έστω H χώρος Hilbert και M γνήσιος κλειστός υπόχωρός του. Τότε $M^{\perp} \neq \emptyset$ και $M \oplus M^{\perp} = H$.