

**Θεωρία Τελεστών**  
**Ασκήσεις 2**  
**Παράδοση: 30 Νοεμβρίου 2011**

**Άσκηση 1** Αν  $P, Q$  είναι προβολές σε ένα χώρο Hilbert  $\mathcal{H}$ , δείξτε ότι ο τελεστής  $P + Q$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $PQ = 0$ , αν και μόνον αν  $QP = 0$ , αν και μόνον αν  $\|P + Q\| \leq 1$ .

**Άσκηση 2 [Sarason]** Let  $M_1, M_2$  be closed orthogonal subspaces,  $M = M_1 \oplus M_2$  and  $P = P(M_2)$ . Define

$$\mathcal{A} = Alg(M_1, M) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A(M_1) \subseteq M_1 \text{ and } A(M) \subseteq M\}.$$

(Note that  $\mathcal{A}$  is block-upper triangular with respect to the decomposition  $H = M_1 \oplus M_2 \oplus M^\perp$ ). Show that the map  $A \rightarrow PAP|_{M_2}$  preserves products on  $\mathcal{A}$ .

Conversely, if  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$  is a subalgebra and  $P = P(N)$  a projection such that  $A \rightarrow PAP|_N$  preserves products on  $\mathcal{A}$ , then the closed subspace  $N$  is **semi-invariant** for  $\mathcal{A}$ , i.e. there are  $\mathcal{A}$ -invariant subspaces  $K \subseteq L$  such that  $N = K \cap L^\perp$ .

**Άσκηση 3** Έστω  $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$  ο διαγώνιος τελεστής  $D_a e_n = a(n)e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) όπου  $a = (a(n)) \in \ell^\infty$ .

(α) Δείξτε ότι ο  $D_a$  είναι φυσιολογικός και  $\|D_a\| = \|a\|_\infty$ .

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση  $\ell^\infty \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2) : a \rightarrow D_a$  είναι ισομετρικός \*-μορφισμός αλγεβρών.

(γ) Βρείτε το σύνολο ιδιοτιμών  $\sigma_p(D_a)$  και το φάσμα  $\sigma(D_a)$ .

(δ) Αν  $p$  πολυώνυμο, δείξτε ότι  $\|p(D_a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(D_a)\}$ .

**Άσκηση 4** Έστω  $T \in \mathcal{B}(L^2([0, 1]))$  ο τελεστής  $Tf(t) = tf(t)$  ( $f \in L^2([0, 1])$ ,  $t \in [0, 1]$ ). Δείξτε ότι  $\sigma_p(T) = \emptyset$  και βρείτε το  $\sigma(T)$ .

**Άσκηση 5** Αν  $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  δείξτε ότι  $\sigma(A) \subseteq [a, b]$  όπου  $a = \inf\{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$  και  $b = \sup\{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$ . Να συμπεράνετε ότι  $\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$ .

**Άσκηση 6** (α) Έστω  $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης (bilateral shift)  $Ue_k = e_{k+1}$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Δείξτε ότι  $\sigma(U) = \mathbb{T}$ .

(β) Αν  $S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  ο περιορισμός του  $U$  στον (κλειστό,  $U$ -αναλλοίωτο) υπόχωρο  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  που παράγεται από τα  $\{e_k : k \geq 0\}$  (δηλ. είναι η κλειστή γραμμική τους θήκη). Δείξτε ότι  $\sigma(S) = \mathbb{D}$ .

Έχουν αυτοί οι τελεστές ιδιοτιμές; Οι συζυγείς τους;

**Άσκηση 7** Δείξτε ότι δεν υπάρχει τελεστής  $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$  ώστε  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Γενικότερα, δείξτε ότι το unilateral shift  $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$  δεν έχει τετραγωνική ρίζα. Τί συμβαίνει για το bilateral shift  $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ ;