Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 2
Παράδοση: 26 Μαρτίου 2010

Άσκηση 1 Αν P, Q είναι προβολές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, δείξτε ότι ο τελεστής $P+Q$ ειναι προβολή αν και μόνον αν $PQ=0$, αν και μόνον αν $QP=0$, αν και μόνον αν $\|P+Q\| \leq 1$.

Άσκηση 2 Let M_1, M_2 be closed orthogonal subspaces, $M = M_1 \oplus M_2$ and $P = P(M_2)$. If $\mathcal{A} = Alg(M_1, M) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A(M_1) \subseteq M_1$ and $A(M) \subseteq M\}$, the map $A \to PAP|_{M_2}$ preserves products on $\mathcal{A}$, not *.

Conversely, if $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is a subalgebra and $P = P(N)$ a projection such that $A \to PAP$ preserves products on $\mathcal{A}$, then the closed subspace N is **semi-invariant** for $\mathcal{A}$, i.e. there are $\mathcal{A}$-invariant subspaces $K \subseteq L$ such that $N = K \cap L^{\perp}$.

Άσκηση 3 Έστω $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ο διαγώνιος τελεστής $D_a e_n = a(n) e_n$ $(n \in \mathbb{N})$ όπου $a = (a(n)) \in \ell^\infty$.

(α) Δείξτε ότι ο D_a είναι φυσιολογικός και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\ell^\infty \to \mathcal{B}(\ell^2) : a \to D_a$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός αλγεβρών.

(γ) Βρείτε το $\sigma_p(D_a)$ και το $\sigma(D_a)$.

(δ) Αν p πολυώνυμο, δείξτε ότι $\|p(D_a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(D_a)\}$.

Άσκηση 4 Έστω $T \in \mathcal{B}(L^2([0,1])$ ο τελεστής $Tf(t) = tf(t)$ $(f \in L^2([0,1])$, $t \in [0,1])$. Δείξτε ότι $\sigma_p(T) = \emptyset$ και βρείτε το $\sigma(T)$.

Άσκηση 5 Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ δείξτε ότι $\sigma(A) \subseteq [a,b]$ όπου $a = \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ και $b = \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$. Να συμπεράνετε ότι $\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$.

Άσκηση 6 (α) Έστω $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης (bilateral shift) $Ue_k = e_{k+1}$, $(k \in \mathbb{Z})$. Δείξτε ότι $\sigma(U) = \mathbb{T}$.

(β) Αν $S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ο περιορισμός του U στον (κλειστό, U-αναλλοίωτο) υπόχωρο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ που παράγεται από τα $\{e_k : k \geq 0\}$ (δηλ. είναι η *κλειστή* γραμμική τους θήκη). Δείξτε ότι $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$.

Έχουν αυτοί οι τελεστές ιδιοτιμές; Οι συζυγείς τους;

Άσκηση 7 Δείξτε ότι δεν υπάρχει τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ ώστε $T^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Γενικότερα, δείξτε ότι το unilateral shift $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν έχει τετραγωνική ρίζα. Τί συμβαίνει για το bilateral shift $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z})$;