12 Μαρ 2018

A, B C^*-αλγ με 1,

$\varphi : A \to B$ διατηρεί $+, \cdot, *, 1$

(1) • $\forall a \in A \quad \sigma_B(\varphi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$

Απόδ. Αν $\lambda \notin \sigma(a) \Rightarrow \lambda 1 - a \in Inv(A)$

$$\Downarrow \varphi$$

$$\varphi(\lambda 1 - a) \in Inv(B)$$
$$\parallel$$
$$\lambda \varphi(1) - \varphi(a)$$
$$\parallel$$
$$\lambda 1 - \varphi(a)$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda \notin \sigma(\varphi(a))$$

(2) • $a \in A_+ \Rightarrow \varphi(a) \in B_+$

Απόδ. $a \in A_+ \iff a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(a^*) = \varphi(a)^*$

και $\sigma(\varphi(a)) \overset{(1)}{\subseteq} \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$

δηλ. $\varphi(a) = \varphi(a)^*$ και $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \mathbb{R}_+$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(a) \in B_+$$

(3) • $\forall a \in A, \quad \|\varphi(a)\|_B \leq \|a\|_A$

Απόδ. (i) Υπόθεση $a = a^*$: τότε

$\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$

οπότε, επειδή $\varphi(a) = \varphi(a)^*$ ισχύει

$\|\varphi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\varphi(a))\}$

$\overset{(1)}{\leq} \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(a)\} \leq \|a\|$

(ii) $a \in A$ τυχαίο: Θεωρώ το a^*a ξέρω ότι $\|\varphi(a^*a)\| \leq \|a^*a\|$

οπότε: $\|\varphi(a)\|^2 \overset{C^*}{=} \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| \overset{*\text{-μορφ}}{=} \|\varphi(a^*)\varphi(a)\|$

$\overset{\text{μορφ}}{=} \|\varphi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| \leq \|a\|^2$

(4) • Αν φ είναι επιπλέον 1-1, τότε
$\forall a \in C^*(1,a)$,
$\sigma_B(\varphi(a)) = \sigma_A(a)$

Χρειάζομαι:

[Παρ $\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x^*x)\| = \sup \sigma(\varphi(x^*x)) = \sup \sigma(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2$]

άρα φ 1-1 $\Rightarrow$ φ ισομετρία

Απόδ (4): Έστω $\sigma(\varphi(a)) \subsetneq \sigma(a)$

$\exists\, f : \sigma(a) \to [0,1]$ συνεχής $\neq 0$

$f|_{\sigma(\varphi(a))} = 0$

$f \neq 0$ συνεχής στο $\sigma(a)$, άρα $f(a) \in A$, $f(a) \neq 0$

$f|_{\sigma(\varphi(a))} = 0$ συνεπώς $f(\varphi(a)) = 0$

Όμως (ισχ) $f(\varphi(a)) = \varphi(f(a))$

οπότε έχω $\varphi(f(a)) = 0$
άρα φ όχι 1-1

Απόδ ισχ: $\exists (p_n)$ πολυώνυμα με $p_n \to f$
ομοιόμορφα στο $\sigma(a)$
$\Downarrow$ συναρτ. λογ.
$p_n(a) \to f(a)$

επίσης $p_n \to f$ στο $\sigma(\varphi(a))$
$\Downarrow$
$p_n(\varphi(a)) \to f(\varphi(a))$

Όμως η φ διατηρεί $+$ και $\cdot$, $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$ $\forall n$
άρα
$\varphi(p_n(a)) = p_n(\varphi(a))$ (**)

$p_n(a) \to f(a)$
$\Downarrow$ φ συνεχής

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(p_n(a)) \to \varphi(f(a)) \\ \quad \parallel \\ p_n(\varphi(a)) \to f(\varphi(a)) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(f(a)) = f(\varphi(a)) = 0$$

[Απόδ (**): $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

$p(\varphi(a)) = a_0 \varphi(1) + a_1 \varphi(a) + \dots + a_n \varphi(a^n)$
$= a_0 1 + a_1 \varphi(a) + \dots + a_n \varphi(a)^n$
$= \varphi(p(a))$]

Μια αναπαράσταση (α-αναπ.) μιας C^*-αλγ A
είναι:

$$\pi : A \longrightarrow B(H)$$
↑ Hilbert

που είναι $*$-μορφισμός

όταν A έχει μονάδα 1, τότε:

ονομάζω: $P = \pi(1)$
παρατηρώ $P = P^*$
και $P = P^2$
$\Downarrow$
P ορθή προβολή

ονομάζω $H' = P(H)$

παρατηρώ ότι $\forall a \in A$, $\pi(a) H' \subseteq H'$
και $\pi(a)\big|_{(H')^\perp} = 0$

$$\pi(a) = \begin{array}{cc} H' & (H')^\perp \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

διότι $\pi(a) = \pi(1 a 1) = \pi(1)\pi(a)\pi(1) = P\pi(a)P$

οπότε $\forall \xi \in P(H)$ έχω $\pi(a)\xi = P\pi(a)P\xi \in H'$

και $\forall \xi \in (H')^\perp$ έχω $\pi(a)\xi = P\pi(a)P\xi = 0$

οπότε ονομάζω $\pi'(a) = \pi(a)\big|_{H'}$

και παρατηρώ: $\pi'(1) = I_{H'}$

<u>Συμπέρασμα</u> όταν η A έχει μονάδα
χωρίς βλάβη απαιτώ $\pi(1) = Id$

Δείξαμε ότι $\forall$ αναπ. μιας C^*-αλγ. είναι

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|$$

και αν είναι 1-1 τότε $\forall a \in \mathcal{A}$

$$\|\pi(a)\| = \|a\|$$

Η νόρμα μιας C^*-άλγεβρας (με μονάδα) καθορίζεται από την αλγεβρική δομή

- $\forall a \in \mathcal{A}$ $a = a^*$ $\exists \lambda > 0$ ώστε

$$\boxed{-\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1}$$

$\Updownarrow$ ορ.

$$a + \lambda 1 \in \mathcal{A}_+ \text{ και } \lambda 1 - a \in \mathcal{A}_+$$

Αρκεί να πάρω $\lambda = \|a\|$ κ' από μετασχ. και από θεωρ. ότι $\sigma(a+\lambda 1) \subseteq \mathbb{R}_+$ και $\sigma(\lambda 1 - a) \subseteq \mathbb{R}_+$

Επομένως: $-\|a\| 1 \leq a \leq \|a\| 1$

Αν ονομάσω $\mathcal{A}_h = \{a \in \mathcal{A} : a = a^*\}$ πραγματικός γραμμ. χώρος

και ορίζεται μερ. διάταξη ($\leq$) συμβιβαστή με γραμμ. δομή (δηλ. $\mathcal{A}_+$ κώνος)

και $1 \in \mathcal{A}_h$ είναι μονάδα διάταξης

order unit

δηλ. $\forall a \in \mathcal{A}_h$ $\exists \lambda > 0$ ώστε

$$-\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1$$

- η $\|a\|$ ενώ $a=a^*$ είναι το μικρότερο $\lambda \geq 0$ που ικανοποιεί $-\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1$

- $\forall a \in A$ και:
$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\}$$
είναι αλγεβρικά αντικείμενα:
$$\sigma(a^*a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a^*a \notin Inv(A)\}$$

<u>όπως</u>

Αν $\|\ \|$, $|||\ |||$ είναι δύο νόρμες σε μία $*$-άλγεβρα
τ.ω.
η $(A, \|\ \|)$ και η $(A, |||\ |||)$
να είναι C^*-άλγεβρα
τότε $\|\cdot\| = |||\cdot|||$

<u>Απόδ</u>:
$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \sup\{|\lambda| : \lambda 1 - x^*x \notin Inv(A)\}$$
$$|||x|||^2 = \text{''} \qquad \text{''}$$

Ισχυρίζομαι:

<u>Πρόταση</u> Αν $(\mathcal{A}, \|\ \|)$ μία C^*-άλγεβρα (μη πλήρης) και $|||\cdot|||$ μία νόρμα στην $\mathcal{A}$

που ικανοποιεί $|||ab||| \leq |||a|||\cdot|||b|||$
και
$|||a^*a||| = |||a|||^2$

τότε $|||\cdot||| = \|\cdot\|$

[Nathaniel Brown (Nate) + Narutaka Ozawa (Taka) : C*-algebras and Finite Dimensional Approximations]

<u>Απόδ.</u> Ονομάζω $\mathcal{A}'$ την <u>πλήρωση</u> της $(\mathcal{A}, |||\ |||)$

είναι C^*-άλγεβρα

Θεωρώ $\varphi : (\mathcal{A}, \|\ \|) \longrightarrow (\mathcal{A}', |||\ |||)$
$a \longmapsto a$

είναι 1-1 $*$-ομομορφισμός
άρα είναι ισομετρία.

(όπου $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'$
↳ είναι κλειστή και πυκνή
άρα $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$)

<u>Πόρισμα</u> $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^*-αλγ, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
1-1 $*$-ομομορφισμός
τότε $\varphi(\mathcal{A})$ κλειστή
στην $\mathcal{B}$

<u>Παρ.</u> το 1-1 δεν χρειάζεται
(απόδ.: παραλείπεται)

Θετικές Γραμμ. Μορφές

$\mathcal{A}$: C^*-άλγ με 1, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$

θετική, δηλ. $a \in \mathcal{A}_+$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(a) \geq 0$$

[ισοδ. $\forall x \in \mathcal{A}$, $\varphi(x^* x) \geq 0$]

1. Πρόταση Τότε, $\forall a = a^* \in \mathcal{A}$, $\varphi(a) \in \mathbb{R}$

Απόδ. $a = a_+ - a_-$ όπου $a_\pm \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = \underset{\in \mathbb{R}_+}{\varphi(a_+)} - \underset{\in \mathbb{R}}{\varphi(a_-)} \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$

2. Πρότ. Τότε, $\forall x \in \mathcal{A}$, $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$

Απόδ. άσκ.

3. Πρότ. Ανισότητα C-S:

Ορίζω $\langle a, b \rangle = \varphi(b^* a)$

Πρότ. (i) είναι sesquilinear

δηλ. $a \mapsto \langle a, b \rangle$ γρ.

$b \mapsto \langle a, b \rangle$ αντιγρ.

(ii) $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$

Απόδ. $\langle b, a \rangle = \varphi(a^* b)$

$= \varphi((b^* a)^*)$

$= \overline{\varphi(b^* a)} = \overline{\langle a, b \rangle}$

(iii) $\langle a, a \rangle \geq 0$ διότι

$= \varphi(a^* a)$

άρα $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$

ημιεσωτερικό γινόμενο

Ένα εσωτ. γινόμενο έχω φ μορφή

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

Απόδ. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε το

$\langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle \geq 0$

τριώνυμο διακρίνουσα

$(\mathcal{A}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$

Πρότ. $\mathcal{H} = B(\mathcal{H})$, $\xi \in \mathcal{H}$ vector states

$\varphi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ pure states

Αποδ: Αν $T \geq 0$ γράφω $T = A^*A$

και έχω $\varphi(T) = \langle A^*A\xi, \xi \rangle$

$= \langle A\xi, A\xi \rangle$

$= \|A\xi\|^2 \geq 0$

φ | state $\Longleftrightarrow$ $\varphi(I) = 1$

$\Longleftrightarrow$ $\|\xi\| = 1$

Συνήθως γράφουμε $\omega_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$

Άσκ Κάθε ω_ξ είναι αγνό state

[Το αντίστροφο δεν ισχύει όταν $\dim \mathcal{H} = +\infty$]

$$\varphi(T) = \lambda \langle T\xi_1, \xi_1 \rangle + \mu \langle T\xi_2, \xi_2 \rangle \quad \text{όπου } \lambda, \mu \geq 0, \ \lambda + \mu = 1$$

$\|\xi_i\| = 1$

state

"μείγμα"

Πρότ Αν $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$

και $\xi_i \in \mathcal{H}$, $\|\xi_i\| = 1$

Θέτω:

$$\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$$

: "στατιστικό μείγμα"

Άσκ $\exists\ \varphi : B(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ state, $\varphi \neq 0$ ώστε $\varphi(A) = 0$ $\forall A \in B(\mathcal{H})$ πεπερ. τάξης

απειροδιάστατος

φ : singular states

$\mathcal{A} = C(K)$

(i) Σταθ. $t \in K$ και

$\varphi(f) = f(t)$ γραμμική θετική και $\varphi(\mathbb{1}) = 1$

άρα δ Dirac

$f(t) = \int f \, d\delta_t$

$f \in \mathcal{A}$

Borel

(ii) μ: μέτρο πιθανότητας στο K

$\varphi(f) = \int f \, d\mu$

$f \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\mu \geq 0$

και $\int \mathbb{1} \, d\mu = \mu(K) = 1$

κυρτό σύνολο

<u>Άρα</u> Τα ακραία σημεία του $\mathcal{P}$ = μέτρα πιθ. στο K είναι ακριβώς τα μέτρα Dirac.

$\mathcal{A}$ C^*-alg., $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ $*$-avar

$\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\|\xi\| = 1$

$$\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi) \xrightarrow{\omega_\xi} \mathbb{C}$$

$$\varphi : a \xrightarrow[\text{Jcrlnz}]{} \pi(a) \xrightarrow[\text{Jcr}]{} \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$

$$\varphi(1) = \langle \pi(1)\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = 1$$

(G-N-S)

Gsmp $\forall \varphi$ state $\exists$ ... !!

Κάθε θετική γραμμική μορφή σε μια C^*-άλγ είναι συνεχής

<u>Παράδ</u> $A = C(K)$, $\varphi(f) = \int f \, d\mu$

τότε $|\varphi(f)| = \left|\int f \, d\mu\right|$

(ΧΑΟΥ ΝΤΟΥ ΓΙΟΥ ΝΟΟΥ;) $\le \int |f| \, d\mu$

$\le \sup|f| \, \mu(K)$

$= \left(\int 1 \, d\mu\right) \|f\|_\infty$

δηλ. $\forall f$, $|\varphi(f)| \le \varphi(1) \|f\|_\infty$

Άρα φ συνεχής και $\|\varphi\| \le \varphi(1)$.
Μάλιστα $\|\varphi\| = \varphi(1)$ αφού $0 \le \varphi(1) \le \|\varphi\| \, \|1\|_\infty = \|\varphi\|$

Έστω τώρα A μια C^*-άλγ
Θδο $\forall a \in A$: $|\varphi(a)| \le \varphi(1) \|a\|$

Περίπτωση (i) : $a = a^*$
τότε έχω

$$-\|a\| 1 \le a \le \|a\| 1$$

$\Downarrow$ (φ θετική) άρα $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, $\varphi(1) \in \mathbb{R}$

$$\varphi(-\|a\| 1) \le \varphi(a) \le \varphi(\|a\| 1)$$

$\Updownarrow$

$$-\|a\| \varphi(1) \le \varphi(a) \le \|a\| \varphi(1)$$

$\Downarrow$

$$|\varphi(a)| \le \varphi(1) \|a\|$$

(ii) $a \in A$ τυχόν:

$$|\varphi(a)|^2 = |\varphi(a1)|^2 \overset{CS}{\le} \varphi(aa^*) \varphi(1)$$

$$\le \|aa^*\| \varphi(1) \varphi(1)$$

$$= \|a\|^2 (\varphi(1))^2$$

$\Rightarrow |\varphi(a)| \le \|a\| \varphi(1)$ $\blacksquare$