Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικά

Εισαγωγικά

Χώροι τελεστών και γραφήματα,
Τελεστές, υπερτελεστές και Θεωρία Πληροφορίας

Γραφήματα - μεταθετικά και μη

Ορισμός 1. Ένα γράφημα $G = (V, \mathscr{E})$ αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο V, τις ακμές (*the "vertex set"*), και ένα σύνολο $\mathscr{E} \subseteq V \times V$, τις κορυφές (*the "edge set"*), ώστε (1) $(v, v) \notin \mathscr{E}$ για κάθε $v \in V$, *(no loops)* και (2) αν $v \neq w \in V$ και $(v, w) \in \mathscr{E}$, τότε $(w, v) \in \mathscr{E}$.

Γράφουμε $v \sim_{\mathscr{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathscr{E}$ και $v \simeq_{\mathscr{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathscr{E}$ ή $v = w$.

Ορισμός 2. Αν $G = (V, \mathscr{E})$ είναι γράφημα, το συμπλήρωμα (*complement*) του G, που συμβολίζουμε $\bar{G} = (V, \bar{\mathscr{E}})$, ορίζεται από τη σχέση $(v, w) \in \bar{\mathscr{E}} \iff (w \neq v$ και $(v, w) \notin \mathscr{E})$.

Συστήματα Τελεστών (**Operator Systems**)

Αν $a = [a_{ij}] \in M_n$, ο συζυγής a^* είναι ο πίνακας $a^* = [a_{ji}]$.

Ορισμός 3. Συστήμα τελεστών στον $M_n := M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ένα $\mathscr{S} \subseteq M_n$ με τις ιδιότητες

- είναι γραμμικός υπόχωρος του M_n
- είναι αυτοσυζυγής, δηλ. $a \in \mathscr{S} \Rightarrow a^* \in \mathscr{S}$
- περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{1} \in M_n$.

Κάθε γράφημα $G = (V, \mathscr{E})$ με $|V| = n < \infty$ ορίζει ένα σύστημα τελεστών $\mathscr{S}_G \subseteq M_n$ ως εξής

$$\mathscr{S}_G := \{a = [a_{ij}] \in M_n : a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \simeq_{\mathscr{E}} j\}.$$

Δηλαδή το $\mathscr{S}_G$ αποτελείται από όλους τους πίνακες που 'φέρονται' στο $\mathscr{E} \cup \{(i,i) : i \in [n]\}$.

Συστήματα Τελεστών (**Operator Systems**)

Το σύστημα $\mathscr{S}_G$ έχει τις επιπλέον ιδιότητες:

Αν $a \in \mathscr{S}_G$ και $b \in D_n$ (:διαγώνιος πίνακας) τότε $ab \in \mathscr{S}_G$ και $ba \in \mathscr{S}_G$. Συνοπτικά $D_n \mathscr{S}_G D_n \subseteq \mathscr{S}_G$.

Λέμε ότι το $\mathscr{S}_G$ είναι διπρότυπο (bimodule) πάνω στην *-άλγεβρα D_n των διαγωνίων πινάκων.

Το σύνολο D_n είναι σύστημα τελεστών, επιπλέον είναι και άλγεβρα, δηλ. $a, b \in D_n \Rightarrow ab \in D_n$.

Είναι μεταθετική άλγεβρα, και μάλιστα είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa).

Ασκήσεις

Αν $\mathscr{X} \subseteq M_n$ είναι μη κενό σύνολο ο μεταθέτης (commutant) $\mathscr{X}' := \{b \in M_n : ab = ba \, \forall a \in \mathscr{X}\}$ είναι πάντα άλγεβρα (δηλ. γραμ. χώρος και κλειστή στο γινόμενο πινάκων) και περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{1} \in M_n$. Πάντα έχουμε $\mathscr{X} \subseteq (\mathscr{X}')' := \mathscr{X}''$.

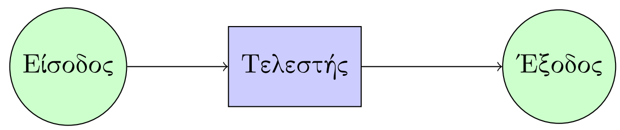
Έστω $\mathscr{A} \subseteq M_n$ μια αυτοσυζυγής άλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$. Τότε $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$.

Η $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική ανν $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. Είναι μεγιστική αβελιανή ανν $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. Παράδειγμα: $\mathscr{A} = D_n$. Υπάρχουν άλλες;

Πότε ένα σύστημα τελεστών $\mathscr{S} \subseteq M_n$ είναι της μορφής $\mathscr{S} = \mathscr{S}_G$ για κατάλληλο γράφημα G;

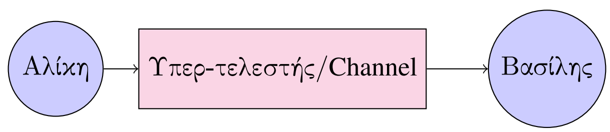
Alice and Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.



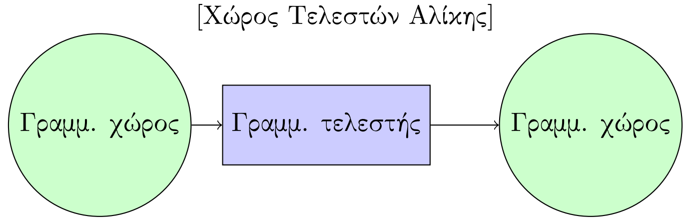
[Εργαστήριο Αλίκης]

Μετάδοση Πληροφοριών

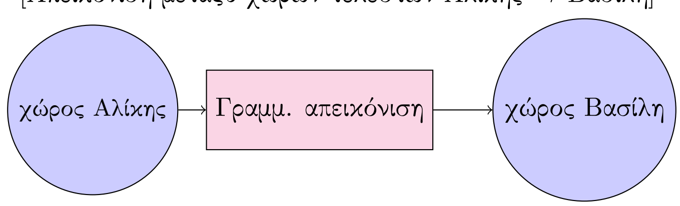


Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]



[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης $\to$ Βασίλη]



2 Γραμμικοί χώροι

Γραμμικοί χώροι, χώροι με εσωτερικό γινόμενο και Τελεστές

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 4. Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x+y=y+x$.

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ ώστε $\forall\, x \in X,\ \vec{0}+x=x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ ώστε $x+(-x)=\vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x,y \in X$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

(ii) $1x=x$.

(iii) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

(iv) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το $\mathbb{C}$.
- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x}=(x(1),x(2),\dots,x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1),\dots,x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00}=c_{00}(\mathbb{N}):=\{x=(x(n)):x(n)\in\mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n)=0\,\forall n>n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Έστω $e_m=(\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n)=1$ όταν $n=m$ και $\delta_m(n)=0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x=x(n))\in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x=\sum\limits_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.

Δηλαδή η $\{e_m : m\in\mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ τω οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n\in\mathbb{N}: x(n)\neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1,2,\dots,n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων ΙΙΙ

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi(k)+\eta(k)) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi(k))$$

για $x=(\xi(k))$, $y=(\eta(k))$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $A\neq\emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f,g\in\mathbb{K}^A$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g$, $\lambda f\in\mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

(Πρτρ: $\mathscr{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων **IV**

• Ο χώρος $\mathscr{L}^1[0,1]$ των Lebesgue-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Lebesgue)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)d\lambda(t):=\int u(t)d\lambda(t)+i\int v(t)d\lambda(t),$$

Ο $\mathscr{L}^1[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n|x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 5. Έστω E,F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T:E\mapsto F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x,y\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K}: T(x+\lambda y)=T(x)+\lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι E,F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T:E\mapsto F$.

3 Γραμμικοί χώροι με νόρμα, χώροι **Hilbert**

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

(N1) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 6. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.

Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\quad d(x,y) = \|x-y\|, \quad x,y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X,d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος *Banach*.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα στο } \ [a,b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 7. Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (*inner product* ή *scalar product*) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση 1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, (α) για κάθε $x,y \in E$ ισχύει
$$|\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}.$$
(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Πρόταση 2. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι **Hilbert**

Ορισμός 8. Ένας χώρος $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος *Hilbert* αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι **Hilbert**

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος $(c_{oo},\|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a,b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle),(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1,\dots,e_m\}$ του E και $\{f_1,\dots,f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n\times m$ πίνακας (n γραμμές, m στήλες) $[a_{ik}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από την σχέση
$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1,\dots n, k = 1,\dots m.$$
Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή: αν $x = \sum \xi_j e_j$ τότε $T_A(x) = \sum \eta_k f_k$ όπου
$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix} = [a_{ij}]\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j\end{bmatrix}.$$
Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}(E,F) : A \to T_A$ είναι 1-1, επί και γραμμική. Όταν $n = m$, απεικονίζει το γινόμενο πινάκων στη σύνθεση τελεστών (η γενικότερα όταν ορίζεται γινόμενο).

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$. Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*}y, x\rangle = \langle y, T_A x\rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.

Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1\rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathscr{L}(H_1, H_2), R \in \mathscr{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$, $(TR)^* = R^* T^*$, $T^{**} = T$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Λήμμα 3. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k\rangle e_k$. Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k\rangle = 0 \, \forall k, \iff \langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle \, \forall k, \iff y = y_x$.

Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k\rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Πυθαγόρειο: $\|z + y_1\|^2 = \|z\|^2 + \|y_1\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση 4. Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.
$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση 5 (Ανισότητα Bessel). (ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Πρόταση 6 (Γενικευμένη ανισότητα Bessel).
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα 1 (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος). Αν H είναι χώρος *Hilbert* και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H, z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω
$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$
Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα 2 (Ορθογώνια διάσπαση). Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου *Hilbert* H, τότε
$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα 7 (Ορθή προβολή). Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου *Hilbert* H. Η απεικόνιση
$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$
όπου $P_M(y) \in M$ και $y - P_M(y) \in M^{\perp}$ είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου **Hilbert**

Θεώρημα 3 (Riesz). Έστω H χώρος *Hilbert*. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x_f \in H$ ώστε
$$f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \text{για κάθε } \; y \in H$$
(και αντίστροφα).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός 9. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν (i) είναι ορθοκανονική, (δηλ. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \; \forall i, j$) και (ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,

(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ (σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).

(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Χώροι **Hilbert**

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη κάθετου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

4 Φραγμένοι τελεστές

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ΄ την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός 10. Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (*bounded operator*) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathscr{B}(E,F), \|\cdot\|)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών. Είναι χώρος *Banach* (δηλ. πλήρης) ανν $(F, \|\cdot\|_F)$ *Banach*.

$$\left\|Tx - Tx'\right\|_F \overset{\gamma\rho.}{=} \left\|T(x - x')\right\|_F \overset{\varphi\rho.}{\leq} \|T\| \left\|x - x'\right\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση 8. Έστω $(E, \|.\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|.\|_F)$ χώρος *Banach*, $D \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος και

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.

Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση

$$\tilde{T} : E \to F \quad \text{δηλ. } \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

4.1 Ο συζυγής τελεστής, ορισμός **C***-άλγεβρας

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα 4. Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι *Hilbert* και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση 9. Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathscr{B}(H_1, H_2) \to \mathscr{B}(H_2, H_1)$ έχει τις εξής ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ φραγμένοι τελεστές, $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$), η $T \to T^* : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Η νόρμα τελεστή
Αν $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \le 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in B_1(H_1), y \in B_2(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m, \dim H_2 = n$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \le 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \le 1 \right\}$$

4.2 Παραδείγματα τελεστών

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i\rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε $(Tx)(i) = \langle Tx, e_i\rangle = \displaystyle\sum_k a_{ik} x(k)$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Για κάθε

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots)$$

Ορίζω U:

$$Ux = (\ldots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \ldots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί. Ο συζυγής U^*:

$$\begin{aligned} x &= (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots) \\ U^* x &= (\ldots, x(0), x(1), x(2), x(3), \ldots) \end{aligned}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Ισοδύναμα:

• Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } U^* e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και } S^* e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). (Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

5 C* άλγεβρες και αναπαραστάσεις

C*-άλγεβρες

Ορισμός 11. Ενέλιξη (*involution*) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.

(β) $a^{**} = a$.

(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.

για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathscr{B}(H)$.

Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}, t \in K$ (όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

C*-άλγεβρες

Ορισμός 12. C^*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα *Banach* $\mathscr{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathscr{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^* \in \mathscr{A}$.

Θεώρημα 5 (Gelfand-Naimark). Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι ισομορφική, ως C^*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathscr{B}(H)$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος *Hilbert* H και απεικόνιση $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

• Η απεικόνιση $f \to M_f : C([a,b]) \to \mathscr{B}(L^2([a,b]))$ αποτελεί μια 1-1 αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C([a,b])$ στον χώρο Hilbert $L^2([a,b])$.

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$

Αν $(X, \mathscr{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$ αν
(α) είναι $\mathscr{S}$-μετρήσιμη και

(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded), δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \le M$ σχεδόν παντού, δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.

Δηλ. ορίζουμε $\|f\|_\infty := \text{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0\}$.

Αν $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$, τότε $\|f\|_\infty = 0$ ανν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Ο $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$, που γίνεται C* άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο (μ-σχεδόν παντού).

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός 13. *Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.*

(i) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (*normal*) αν $T^*T = TT^*$.(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (*self-adjoint*) αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (*unitary*) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός. Κάθε M_f είναι φυσιολογικός. Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής ανν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t. Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

... Σε μια **C*** άλγεβρα

Ορισμός 14. Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα.

(i) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται φυσιολογικό (*normal*) αν $a^*a = aa^*$. (π.χ. κάθε $f \in C(K)$)

(ii) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται αυτοσυζυγές (*self-adjoint*) αν $a = a^*$. (π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{R}$)

(iii) Αν η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, ένα $u \in \mathscr{A}$ λέγεται ορθομοναδιαίο (*unitary*) αν $u^*u = \mathbf{1}$ και $uu^* = \mathbf{1}$. (π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{T}$)

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathscr{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_i = A_i^* \ (i = 1,2).$$

Γράφω $\mathscr{B}_h(H) = \{T \in \mathscr{B}(H), T = T^*\}$.

Ορισμός 15. *(i)* Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται θετικός (*positive*) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ (οπότε $T \in \mathscr{B}_h(H)$). Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathscr{B}_+(H)$.

(ii) Αν $T, S \in \mathscr{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathscr{B}_+(H)$.

Θετικοί τελεστές

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και } \lambda \geq \mu \geq 0 \, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$$\text{Αν } A = A^* \text{ τότε } \ -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$
$$\text{άρα } \ A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad \text{(διαφορά δυο θετικών)}$$

Παρατήρηση: Κάθε τελεστής A της μορφής $A = B^*B$ είναι θετικός. Θα δούμε αργότερα ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Προβολές

M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^\perp : \quad x = x_M + x_{M^\perp}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη ($P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$: δηλ. $P \in \mathscr{B}(H)$.

Επίσης, είναι αυτοσυζυγής ($P = P^*$) μάλιστα θετικός.

Αντίστοφα, αν $Q \in \mathscr{B}(H)$ ικανοποιεί $Q = Q^2 = Q^*$, τότε είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} Q$ (και $\ker Q = (\operatorname{im} Q)^\perp$).

Πρόταση 10. Έστω H χώρος *Hilbert* και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή ανν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής: $P = P^2 = P^*$.

Σχόλια

Σχόλια στο πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων

Δείτε το αρχείο `prtpa.pdf`

6 Το φάσμα

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathscr{A}$ λέγεται αντιστρέψιμο (invertible) αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathscr{A}$ με $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \operatorname{Inv}(\mathscr{A})$.

Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T, ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\boldsymbol{\sigma}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \operatorname{Inv}(\mathscr{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός 16. Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα *Banach* με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Το φάσμα (*spectrum*) $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - x \notin \operatorname{Inv}(\mathscr{A})\}.$$

Το φάσμα ενός στοιχείου

Παράδειγμα Αν $f \in C([0,1])$, τότε $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0,1])$. (Άσκηση!)

Πρόταση 11. Σε κάθε άλγεβρα *Banach* $\mathscr{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathscr{A}$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Μάλιστα, αν $|\lambda| > \|x\|$ τότε $\lambda \notin \sigma(x)$.

Το φάσμα και η φασματική ακτίνα

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή
$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$
Δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα 6 (Gelfand-Beurling). *Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Τότε*
$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα 12. *Αν $\mathscr{A}$ είναι C^*-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.*

7 Ο συναρτησιακός λογισμός

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Αν p πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$,

Πρτρ. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί $+$ και $\cdot$.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 7. *Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p,*
$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}.$$

Χρειάζονται τα

Πρόταση 13 (Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης). *Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*
$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Πρόταση 14. *Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$.*
$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα.

Θεώρημα 8 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)). Αν $a = a^* \in \mathscr{A}$, η απεικόνιση $p \to p(a)$ (όπου p πολυώνυμο) επεκτείνεται μοναδικά σε ισομετρικό *-μορφισμός $\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$

Επομένως ισχύει $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Ορισμός 17. Έστω $a = a^* \in \mathscr{A}$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (*continuous functional calculus*) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathscr{A}$. Γράφουμε $f(a)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(a)$, το στοιχείο $f(a)$ της $\mathscr{A}$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(a) = \lim p_n(a) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(a)} \to 0.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα 15. Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathscr{A}$. Το σύνολο

$$C^*(\mathbf{1}, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathscr{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων του a.

Πρόταση 16. Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $a = a^* \in \mathscr{A}$. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ανεξαρτησία του φάσματος σε **C*** άλγεβρες

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Έστω $b \in \mathscr{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathscr{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathscr{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathscr{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathscr{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathscr{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathscr{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathscr{A}$ δεν ανήκει στην $\mathscr{B}$.

Ανεξαρτησία του φάσματος σε **C*** άλγεβρες

Παράδειγμα

$\mathscr{A} = \mathscr{B}(H)$ όπου $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ και $\mathscr{B}$ η κλειστή υπάλγεβρά της που παράγεται από τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$ και το αμφίπλευρο shift U (όπου $Ue_n = e_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$). Εδώ το U ανήκει προφανώς στην $\mathscr{B}$ και έχει αντίστροφο στην $\mathscr{A}$ (τον τελεστή U^* όπου $U^*e_n = e_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$), αλλά ο U^* δεν ανήκει στην $\mathscr{B}$.

Πράγματι, η $\mathscr{B}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $p(U) = c_0 + c_1U + \cdots + c_kU^k$. Κάθε $p(U)$ είναι κάτω τριγωνικός τελεστής, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Δεν ισχύει όμως για τον U^*.

Αλλιώς: έχουμε $\langle p(U)e_1, e_0\rangle = 0$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα $\langle Be_1, e_0\rangle = 0$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Όμως $\langle U^*e_1, e_0\rangle = 1$.

Ανεξαρτησία του φάσματος σε **C*** άλγεβρες

Πρόταση 17. Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathscr{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathscr{A}}(b) = \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Ειδικότερα, κάθε C* υπάλγεβρα $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$ είναι “inverse - closed”, δηλ. αν $A \in \mathscr{B}$ και ο $A : H \to H$ είναι 1-1 και επί, τότε $A^{-1} \in \mathscr{B}$.

Θετικά στοιχεία

Προσωρινή ορολογία Αν $\mathscr{A}$ είναι μια C* άλγεβρα με μονάδα, ένα $a \in \mathscr{A}$ θα λέγεται positive αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Δεν είναι προφανές ότι το άθροισμα δυο positive στοιχείων είναι positive!

Θα δείξουμε ότι ένα στοιχείο της $\mathscr{B}(H)$ είναι positive αν και μόνον αν είναι θετικός τελεστής.

Άσκηση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ ένας ισομετρικός *-μορφισμός. Ένα $a \in \mathscr{A}$ είναι positive αν και μόνον αν ο $\pi(a)$ είναι θετικός τελεστής.

Συμπέρασμα: (α) το σύνολο $\mathscr{A}_+$ των positive στοιχείων της $\mathscr{A}_+$ είναι κλειστός κώνος.

(β) $\mathscr{A}_+ = \{b^*b : b \in \mathscr{A}\}$.

Τετραγωνική ρίζα

Πρόταση 18. Αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ τότε υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ με $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}^+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{1/2}$.

Απόδειξη Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B^*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $B^2 = A$. $\square$

Ο B μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Πράγματι, αν ένας $T \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με τον A τότε θα μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του A, άρα και με την $f(A) = B$, που είναι όριο πολυωνύμων του A.

Μοναδικότητα: $\longrightarrow$

Μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας

Έστω C positive (δηλ. $C = C^*$ και $\sigma(C) \subseteq \mathbb{R}_+$) τελεστής ώστε $C^2 = A$.

Υπάρχουν positive τελεστές D και Z με $D^2 = C$ και $Z^2 = B$. Σταθεροποιούμε ένα $x \in H$ και θέτουμε $y = (C - B)x$. Τότε

$$\begin{aligned}\|Dy\|^2 + \|Zy\|^2 &= \langle D^2 y, y\rangle + \langle Z^2 y, y\rangle = \langle (B + C)y, y\rangle \\ &= \langle (B + C)(B - C)x, y\rangle \overset{(*)}{=} \langle (B^2 - C^2)x, y\rangle = 0\end{aligned}$$

(*) γιατί $CB = BC$ αφου $CA = AC$ άρα $Cf(A) = f(A)C$. Επομένως $Dy = 0$ και άρα $Cy = D^2 y = 0$. Όμοια, $By = 0$.

Τότε όμως $(C - B)y = 0$ και συνεπώς

$$\|(C - B)x\|^2 = \langle (C - B)x, (C - B)x\rangle = \langle y, (C - B)x\rangle = \langle (C - B)y, x\rangle = 0.$$

Αφού το x είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι $B = C$. □

Θετικοί τελεστές

Υπενθύμιση Ένας $A \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται θετικός αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

Λήμμα 19. Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A στον $\mathscr{H}$ είναι θετικός αν και μόνον αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. (δηλ *positive* $\equiv$ θετικός!)

Αποδειξη Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{1/2}$. Για κάθε $x \in \mathscr{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle B^2 x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός.

Αντίστροφα έστω ότι ο A είναι θετικός. Αν $\lambda \in \sigma(A)$, υπάρχει (x_n) στον $\mathscr{H}$ με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$ (γιατί $A = A^*$). Τότε

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0$$

άρα $\lambda \geq 0$ (αφού $\lambda \in \mathbb{R}$).

Θετικοί τελεστές

Σημείωσε ότι η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 9 (Τετραγωνική ρίζα). Έστω $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο T είναι θετικός.

(β) Υπάρχει $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ θετικός ώστε $T = B^2$.

(γ) Υπάρχει $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ώστε $T = S^* S$.

(δ) $T = T^*$ και $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Σχόλια

Σχόλια στο δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων

Δείτε το αρχείο `gelbe.pdf`.

Η πολική αναπαράσταση

Ορισμός 18. Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ τυχαίος τελεστής. Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής $T^*T : H_1 \to H_1$ είναι θετικός. Η μοναδική θετική τετραγωνική του ρίζα συμβολίζεται $|T|$.

Άσκηση 20. Να βρεθούν δύο 2×2 πίνακες A, B ώστε να μην ισχύει η ανισότητα $|A + B| \leq |A| + |B|$.

Θεώρημα 10. Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ τυχαίος τελεστής. Υπάρχει φραγμένος τελεστής $V : H_1 \to H_2$ με $\ker V = \ker T$ με $V|_{(\ker V)^\perp}$ ισομετρία (μερική ισομετρία) ώστε

$$T = V|T|.$$

«Μοναδικότητα»: Αν $T = W|T|$ όπου W μερική ισομετρία $\ker W = \ker T$ τότε $W = V$.

8 Το φασματικό Θεώρημα

Το Φασματικό Θεώρημα όταν $\dim H < \infty$

Λήμμα 21. Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. (1) Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.

(2) Οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και (3) είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα 11. Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν (μιγαδικό) χώρο *Hilbert* H διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{x_k : k = 1, \ldots, n\}$ του H και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Tx_k = a_k x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (***unitarily equivalent***) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to \ell^2(n)$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 12. Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν: χώρος μέτρου (X, μ), ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to L^2(X, \mu)$ και συνάρτηση $h \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε $T = U^{-1}M_h U$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ \downarrow U & & \downarrow U \\ L^2(\mu) & \xrightarrow{M_h} & L^2(\mu) \end{array}$$

P.R. Halmos [1963]. What does the spectral theorem say? Amer. Math. Monthly 70.

Το Φασματικό Θεώρημα: Σχόλια

Η απεικόνιση $T \to M_f$ είναι το αντίστοιχο της διαγωνοποίησης $T \to \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ που επιτυγχάνεται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Μπορεί κανείς να επιτύχει «ταυτόχρονη διαγωνοποίηση» όλης της C*-υπάλγεβρας του $\mathscr{B}(H)$ που παράγει ο T: σε κάθε $g \in C(\sigma(T))$ αντιστοιχεί ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{g\circ h} \in \mathscr{B}(L^2(X,\mu))$.

Πρόκειται λοιπόν για μια 1-1 αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\sigma(T))$ στον χώρο $L^2(X,\mu)$.

Υπενθύμιση: Ο συναρτησιακός λογισμός

Ορισμός 19. Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις είναι η μοναδική συνεχής επέκταση

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathscr{B}(H), \|\cdot\|) : f \to f(A)$$

της απεικόνισης $\Phi_o : p \to p(A)$.

Είναι ισομετρικός *-μορφισμός, δηλ. μια ισομετρική *-αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\sigma(A)$ στον χώρο H. Η εικόνα του είναι η $C^*(\mathbf{1},A)$, η μικρότερη C*-υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον A και τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$.

Για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$f(A) = \Phi_c(f) = \|\cdot\|\text{-}\lim p_n(A)$$

όπου p_n πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$.

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του **Riesz**

Αν μ θετικό μέτρο Borel σε συμπαγή (μετρικό) χώρο Σ τότε η απεικόνιση

$$\phi_\mu : C(\Sigma) \to \mathbb{C} : f \to \int f(t)d\mu(t)$$

είναι (συνεχής) γραμμική μορφή, και είναι θετική, δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \phi_\mu(f) \geq 0$.

Αντίστροφα:

Θεώρημα 13 (Riesz). Για κάθε θετική γραμμική $\phi : C(\Sigma) \to \mathbb{C}$ υπάρχει (μοναδικό) θετικό κανονικό μέτρο *Borel* μ στο Σ ώστε $\phi = \phi_\mu$.

Αναπαραστάσεις της **C*** άλγεβρας $C(\Sigma)$

Έστω Σ συμπαγής (μετρικός) χώρος και $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ μια 1-1 (άρα ισομετρική) *-αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$ στον χώρο Hilbert H.

Λήμμα 22. Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο *Borel* μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = \pi(f) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi(f)"] & H \\ L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"] \arrow[r, "M_f"'] & L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"'] \end{tikzcd}$$

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής και $\Sigma = \sigma(A)$.

Λήμμα 23. Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο *Borel* μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f(A)"] & H \\ L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"] \arrow[r, "M_f"'] & L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"'] \end{tikzcd}$$

... άρα $U_x M_h = A U_x$, όπου $h(\lambda) = \lambda$.

Αναπαραστάσεις της **C*** άλγεβρας $C(\Sigma)$

Λήμμα 24. Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο *Borel* μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = \pi(f) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

Σχέδιο Απόδειξης Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\Sigma) \to \mathbb{C} : f \to \langle \pi(f)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι θετική γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο Σ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle \pi(f)x, x\rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\Sigma).$$

Αναπαραστάσεις της **C*** άλγεβρας $C(\Sigma)$

Όμως $C(\Sigma) \subseteq L^2(\Sigma, \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{ox} : (C(\Sigma), \|\cdot\|_{L^2(\mu_x)}) \to (H, \|\cdot\|_H) : f \to \pi(f)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\Sigma)$,

$$\begin{aligned}\|\pi(f)x\|_H^2 &= \langle \pi(f)x, \pi(f)x\rangle = \langle \pi(f)^*\pi(f)x, x\rangle = \langle \pi(\bar{f}f)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f}f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = \pi(f)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\Sigma)$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = \pi(fg)x = \pi(f)(\pi(g)x) = (\pi(f)U_x)(g).$$

... άρα $U_x M_f = \pi(f)U_x$.

Αναπαραστάσεις της **C*** άλγεβρας $C(\Sigma)$

Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο κυκλικός υπόχωρος

$$H_x = \overline{\{\pi(f)x : f \in C(\Sigma)\}}$$

του x για την π.

Ορισμός 20. Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται κυκλικό (*cyclic*) για την αναπαράσταση $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (*cyclic subspace*) που ορίζει είναι όλος ο H, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $\{\pi(f)x : f \in C(\Sigma)\}$ είναι πυκνός στον H.

Πρόταση 25. Αν μια αναπαράσταση $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο *Borel* μ στο Σ ώστε όλοι οι τελεστές $\pi(f), f \in C(\Sigma)$ να είναι ταυτοχρόνως ορθομοναδιαία ισοδύναμοι με τούς τελεστές M_f στον $L^2(\Sigma, \mu)$: δηλ. $\exists U : \pi(f) = UM_fU^* \;\; \forall f \in C(\Sigma)$.

Αναπαραστάσεις της **C*** άλγεβρας $C(\Sigma)$

Παράδειγμα
Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [1] και έστω $\pi : C([0,1]) \to \mathscr{B}(H) : f \to M_f \oplus M_f$. Τότε η π είναι ισομετρική αναπαράσταση χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Λήμμα 26. Αν $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ είναι αναπαράσταση, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H, ώστε

(ι) κάθε H_i να είναι π-αναλλοίωτος, δηλ. $\pi(f)(H_i) \subseteq H_i \, \forall f$

(ιι) κάθε H_i να είναι π-κυκλικός, δηλ. να περιέχει π-κυκλικό διάνυσμα

(ιιι) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Πρόταση 27. Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο *Borel* μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_h στον $L^2(\sigma(A), \mu)$ του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_h(g))(x) = xg(x)$.

Παράδειγμα
Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ και έστω $A = M_f \oplus M_f$ όπου $f(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in [0,1])$. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Λήμμα 28. Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H, ώστε

(ι) κάθε H_i να είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $A(H_i) \subseteq H_i$

(ιι) κάθε H_i να είναι A-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A-κυκλικό διάνυσμα

(ιιι) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H.

Από την προηγούμενη Πρόταση, για κάθε i υπάρχει θετικό κανονικό μέτρο Borel μ_i στο $\sigma(A)$ και επί ισομετρία $U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to H_i$ ώστε $U_i^* A|_{H_i} U_i = M_{f_i}$ όπου $f_i(\lambda) = \lambda$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα 14 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές). Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_fU^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel.

[1] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα 15 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές). Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X,μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X,\mu) \to H$ ώστε $A = UM_fU^{-1}$.

Σχέδιο Απόδειξης Για κάθε i, υπάρχει επί ισομετρία $U_i : L^2(X_i,\mu_i) \to H_i$ (όπου $X_i = \sigma(A)$) ώστε $U_i^* A|_{H_i} U_i = M_{f_i}$ όπου η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα ανήκει στον $L^\infty(X_i,\mu_i)$. Μάλιστα $f_i(t) \in \sigma(A)$ για κάθε $t \in X_i$.

Ορίζουμε (X,μ) την «ξένη ένωση» των χώρων μέτρου (X_i,μ_i). Τότε ο $L^2(X,\mu)$ ταυτίζεται (μέσω ισομετρικού ισομορφισμού) με το ευθύ άθροισμα $\sum_i \oplus_i L^2(X_i,\mu_i)$.

Ορίζουμε τον τελεστή $U = \sum_i \oplus_i U_i : L^2(X,\mu) \to H$ και τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ από τη σχέση $f|_{X_i} = f_i$ για κάθε i και έχουμε $UM_f = AU$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} = \vee \mathscr{H}_i \arrow[r, "A"] & \mathscr{H} = \vee \mathscr{H}_i \\
\oplus L^2(X_i,\mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"] \arrow[r, "\oplus M_{f_i}"] & \oplus L^2(X_i,\mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"'] \\
L^2(X,\mu) \arrow[u, "V"] \arrow[r, "M_f"] & L^2(X,\mu) \arrow[u, "V"']
\end{tikzcd}$$

8.1 Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής, $D_A := [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D_A \to \mathbb{C}$ ορίζεται ένας φυσιολογικός τελεστής $g(A) \in \mathscr{B}(H)$.

Η απεικόνιση $g \to g(A)$ διατηρεί άθροισμα γινόμενο και ενέλιξη, επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(t)| : t \in D_A\}.$$

Δείτε και το αρχείο `borelfuncalsa.pdf`

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Θεώρημα 16 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές). Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X,μ), συνάρτηση $h \in L^\infty(X,\mu)$ με $h(x) \in \sigma(A)$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X,\mu) \to H$ ώστε $A = UM_hU^{-1}$.

Παρατήρηση 29. Για κάθε $f \in C(\sigma(A)$, ισχύει η σχέση $f(A) = UM_{f\circ h}U^{-1}$.

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Ονομάζουμε $\mathscr{L}^\infty(D_A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $g : D_A \to \mathbb{C}$ που είναι φραγμένες και Borel μετρήσιμες.

Ορισμός 21. Για κάθε $g \in \mathscr{L}^\infty(D_A)$ ορίζουμε τον τελεστή
$$g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} \in \mathscr{B}(H).$$
Ο συναρτησιακός λογισμός για συναρτήσεις *Borel (the Borel functional calculus)* είναι η απεικόνιση
$$\Phi_b : g \to g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} : \mathscr{L}^\infty(D_A) \to \mathscr{B}(H).$$

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Θεώρημα 17. Η απεικόνιση $\Phi_b : \mathscr{L}^\infty(D_A) \to \mathscr{B}(H) : g \to g(A)$ είναι μορφισμός *-αλγεβρών που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό Φ_c για συνεχείς συναρτήσεις, και ικανοποιεί
$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D_A\}.$$

Πρόταση 30. Έστω $g_n, g \in \mathscr{L}^\infty(D_A)$. Αν $\lim_n g_n = g$ κατά σημείο στο D_A και $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$, τότε η ακολουθία τελεστών $(g_n(A))$ ικανοποιεί
$$\lim_n \langle g_n(A)x, y\rangle = \langle g(A)x, y\rangle \ \forall x, y \in H.$$

(Λέμε ότι $g_n(A) \to g(A)$ ως προς την wot (Weak Operator Topology - ορισμός αργότερα).)

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Ορισμός 22 (Φασματικές προβολές του A). Για κάθε *Borel* υποσύνολο $\Omega \subseteq D_A$ ονομάζουμε $E_A(\Omega) \in \mathscr{B}(H)$ τον τελεστή
$$E_A(\Omega) := \chi_\Omega(A).$$
Πρόταση 31. Η οικογένεια $\{E_A(\Omega) : \Omega \subseteq D_A \ \ Borel\} \subseteq \mathscr{B}(H)$ ικανοποιεί

1. $E_A(\Omega)^* = E_A(\Omega)$
2. $E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Άρα οι $E_A(\Omega)$ είναι προβολές.
3. $E_A(\emptyset) = 0, E_A(\sigma(A)) = I$.
4. Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_x : \Omega \to \langle E_A(\Omega)x, x\rangle$ είναι θετικό μέτρο *Borel*.

Πόρισμα 32. Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα *Borel*, τότε
$$\lim_n \left\| \sum_{k=1}^n E_A(\Omega_k)x - E_A(\cup_n \Omega_n)x \right\|_H = 0 \ \text{ για κάθε } x \in H.$$

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Πρόταση 33. Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών προβολών του. Συγκεκριμένα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $D_A = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ του D_A σε ξένα ανά δυο διαστήματα ώστε

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_A(\Omega_k) \right\|_{\mathscr{B}(H)} < \varepsilon$$

για κάθε επιλογή σημείων $\lambda_k \in \Omega_k, \ k = 1, \ldots, n$. Γράφουμε

$$A = \int \lambda dE_A(\lambda).$$

Παρατήρηση 34. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ότι, αν f είναι συνεχής στο D_A τότε $f(A) = \int f(\lambda) dE_A(\lambda)$.

Συναρτήσεις **Borel** αυτοσυζυγούς τελεστή

Πρόταση 35. Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Ένας $B \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με τον A αν και μόνον αν ο B μετατίθεται με κάθε φασματική προβολή $E_A(\Omega)$, $\Omega \subseteq D_A$ *Borel*.

Σημείωση Ο συναρτησιακός λογισμός Φ_b ορίζεται και όταν ο τελεστής A είναι φυσιολογικός. Η κατασκευή είναι ανάλογη, και στηρίζεται στο Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές (που δεν έχουμε αποδείξει εδώ).

9 Άλγεβρες **von Neumann**

9.1 Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$

Ορισμός 23. Έστω H χώρος *Hilbert*. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (*strong operator topology,* sot) στον $\mathscr{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την sot αν και μόνον αν $\|T_i x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$.

Η sot είναι η ασθένεστερη τοπολογία στον $\mathscr{B}(H)$ για την οποία όλες οι ημινόρμες $\{p_x, x \in H\}$ (όπου $p_x(T) = \|Tx\|$) είναι συνεχείς.

Είναι η τοπολογία στον $\mathscr{B}(H)$ που παράγεται από (έχει υποβάση) τα σύνολα $\{V(A,x) : A \in \mathscr{B}(H), x \in H\}$, όπου $V(A,x) := \{T \in \mathscr{B}(H) : \|Tx - Ax\| < 1\}$.

Παρατήρηση Η sot δεν είναι μετρικοποιήσιμη, όταν $\dim H = \infty$. Για παράδειγμα, αν $\mathscr{E} = \{\sqrt{n} P_n : \in \mathbb{N}\}$ όπου οι P_n είναι κάθετες ανά δύο μονοδιάστατες προβολές, ο $0 \in \mathscr{B}(H)$ ανήκει στην sot-κλειστή θήκη του $\mathscr{E}$, αλλά δεν είναι sot-όριο ακολουθίας από το $\mathscr{E}$.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: sot

Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert.

(i) Ο πολλαπλασιασμός
$$(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\times(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot}):\,(A,B)\longrightarrow AB$$
δεν είναι συνεχής.

(ii) Όμως, για κάθε $r>0$, ο περιορισμός
$$(\mathscr{B}(H)_r,\mathrm{sot})\times(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot}):\,(A,B)\longrightarrow AB$$
(όπου $\mathscr{B}(H)_r=\{T\in\mathscr{B}(H):\|T\|\le r\}$) είναι συνεχής.

(iii) Ο πολλαπλασιασμός είναι ακολουθιακά συνεχής, δηλαδή αν $A_n\xrightarrow{\mathrm{sot}}A$ και $B_n\xrightarrow{\mathrm{sot}}B$ τότε $A_nB_n\xrightarrow{\mathrm{sot}}AB$.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: sot

(iv) Ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά συνεχής, δηλαδή για κάθε $A\in\mathscr{B}(H)$ οι απεικονίσεις
$$\begin{aligned} &L_A:(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot}):B\longrightarrow AB\\ \text{και}\qquad &R_A:(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot}):B\longrightarrow BA\end{aligned}$$
είναι συνεχείς.

(v) Η ενέλιξη
$$(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{sot}):A\longrightarrow A^*$$
δεν είναι (ούτε ακολουθιακά) συνεχής.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Αν $x,y\in H$, θέτουμε
$$\omega_{x,y}:\mathscr{B}(H)\to\mathbb{C}:\,T\to\langle Tx,y\rangle.$$
Η $\omega_{x,y}$ είναι $\|\cdot\|$-συνεχής στον $\mathscr{B}(H)$ και $\|\omega_{x,y}\|=\|x\|\|y\|$.

Ορισμός 24. *Έστω H χώρος Hilbert. Η ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, wot) στον $\mathscr{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία όλες οι γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$ $(x,y\in H)$ είναι συνεχείς.*

Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την wot αν και μόνον αν $\langle T_ix-Tx,y\rangle\to 0$ για κάθε $x,y\in H$.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Πρόταση 36. *(i) Η ενέλιξη είναι wot-wot συνεχής στον $\mathscr{B}(H)$.*

(ii) Ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά wot-wot συνεχής.

(iii) Ο πολλαπλασιασμός
$$(\mathscr{B}(H),\mathrm{wot})\times(\mathscr{B}(H),\mathrm{wot})\longrightarrow(\mathscr{B}(H),\mathrm{wot}):\,(A,B)\longrightarrow AB$$
δεν είναι συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (άρα ούτε περιορισμένος σε φραγμένα σύνολα).

Οι τοπολογίες διαφέρουν όταν $\dim H = \infty$.
Παραδείγματα:Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία, θεωρώ $T_n \in \mathscr{B}(H)$ με $T_n(x_k) = x_{k+n}$. Τότε

$T_n^* \stackrel{\text{sot}}{\to} 0$ αλλά $\|T_n^*\| = 1$ για κάθε n, άρα $T_n^* \stackrel{\|\cdot\|}{\nrightarrow} 0$.
$T_n \stackrel{\text{wot}}{\nrightarrow} 0$ αλλά $\|T_n e_1\| = 1$ για κάθε n, άρα $T_n \stackrel{\text{sot}}{\nrightarrow} 0$. .

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Πρόταση 37. Ένα κυρτό υποσύνολο (ειδικότερα, ένας γραμμικός υπόχωρος) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι sot-κλειστός αν και μόνον αν είναι wot-κλειστός.

Υπενθύμιση (Διαχωριστικό Θεώρημα Hahn - Banach) Αν E χώρος με νόρμα, $K \subseteq E$ κυρτό, κλειστό και $x \notin K$, υπάρχει (κλειστό $\mathbb{R}$-υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει, δηλαδή) $\phi : E \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\mathbb{R}$-γραμμική και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(x) > \lambda \geq \phi(y) \ \ \forall y \in K.$$

(Αν ο E είναι χώρος Hilbert, είναι εύκολη συνέπεια της ύπαρξης πλησιέστερου διανύσματος.)

Πρόταση 38. Μία γραμμική μορφή $\omega : \mathscr{B}(H) \to \mathbb{C}$ είναι wot-συνεχής αν και μόνον αν είναι sot-συνεχής, αν και μόνον αν $\omega \in \operatorname{span}\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$.

Ο $\mathscr{B}(H)$ ως δυϊκός χώρος **Banach**

Υπενθύμιση Ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ μέσω της απεικόνισης $a \to \phi_a : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ όπου

$$\phi_a(b) := \sum a(n)b(n), \ \ a \in \ell^\infty, b \in \ell^1) \ \ (\text{ή } \phi_a(e_n) := a(n)).$$

Συμβολισμός: $\mathscr{B}_\sim(H) = \operatorname{span}\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ είναι ο χώρος των wot-συνεχών γραμμικών μορφών, με $\|\omega\| = \sup\{|\omega(T)| : T \in \mathscr{B}(H), \|T\| \leq 1\})$.

Πρόταση 39. Ο χώρος $\mathscr{B}(H)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρου $(\mathscr{B}_\sim(H), \|\cdot\|)$ μέσω της απεικόνισης

$$A \to \phi_A, \quad \text{όπου} \quad \phi_A(\omega) = \omega(A), (A \in \mathscr{B}(H), \ \omega \in \mathscr{B}_\sim(H)).$$

Επομένως ο $\mathscr{B}(H)$ εφοδιάζεται με μια ασθενή-* τοπολογία, που είναι ισχυρότερη από την wot (γνησίως, αν-ν $\dim H = \infty$). Θα επανέλθουμε στο θέμα.

wot-συμπάγεια της ball($\mathscr{B}(H)$)

Πρόταση 40. Η μοναδιαία μπάλα ball($\mathscr{B}(H)$) είναι wot-συμπαγής.

(Συνέπεια του Θεωρήματος Τίχονοφ)
Δείτε και το `wot.pdf`

9.2 Αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**

Άλγεβρες **von Neumann**

Ορισμός 25. Αν H είναι χώρος *Hilbert* και $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$, ορίζω τον μεταθέτη (*commutant*) $\mathscr{S}'$ του $\mathscr{S}$ ως εξής

$$\mathscr{S}' = \{T \in \mathscr{B}(H) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathscr{S}\}.$$

Το $\mathscr{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα και περιέχει τον I_H. Επίσης, είναι wot-κλειστή. Η $\mathscr{S}'$ είναι *-άλγεβρα αν-ν το είναι αυτοσυζυγές σύνολο, οπότε είναι C* άλγεβρα, αφού είναι norm-κλειστή.

Άλγεβρες **von Neumann**

Ορισμός 26. Έστω (X,μ) χώρος μέτρου. Η πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathscr{M}_\mu$ του (X,μ) είναι η

$$\mathscr{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X,\mu)\}.$$

Η $\mathscr{M}_\mu$ είναι αβελιανή C^*-υπάλγεβρα της $\mathscr{B}(L^2(X,\mu))$.

Πρόταση 41. Αν ο (X,μ) είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathscr{M}_\mu)' = \mathscr{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathscr{M}_\mu$ είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (*maximal abelian selfadjoint algebra* - *masa*) του $\mathscr{B}(L^2(X,\mu))$.

Παράδειγμα
Αν $H = L^2([0,1],m)$ (m: μέτρο Lebesgue) και $\mathscr{M}_0 = \{M_f : f \in C([0,1])\} \subseteq \mathscr{B}(L^2([0,1],m))$, τότε $\mathscr{M}_0' = \mathscr{M}_m$.

Απόδειξη στο `masa.pdf`.

Άλγεβρες **von Neumann**

Ορισμός 27. Έστω H χώρος *Hilbert*. Μία άλγεβρα *von Neumann* $\mathscr{M}$ στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathscr{B}(H)$ που ικανοποιεί

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}''.$$

Παρατηρήσεις (i) Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι wot-κλειστή.

(ii) Αν $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathscr{S} \cup \mathscr{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathscr{S}$, και ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το $\mathscr{S}$.

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathscr{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ (π.χ. $\mathscr{S} = \mathscr{M}'$).

(iv) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathscr{U}'$ για κάποιο σύνολο $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}(H)$ unitary τελεστών (Άσκηση).

Θεώρημα του δεύτερου μεταθέτη **(Bicommutant Theorem)**

Θεώρημα 18 (von Neumann). Έστω $\mathscr{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε

$$\mathscr{A}'' = \overline{\mathscr{A}}^{\text{sot}} = \overline{\mathscr{A}}^{\text{wot}}.$$

Ειδικότερα, η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα *von Neumann* αν και μόνον αν είναι *SOT*-κλειστή, αν και μόνον αν είναι *WOT*-κλειστή.

Παρατήρηση Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής. Οι φασματικές προβολές $E(\Omega)$ μπορεί να μην ανήκουν στην C^*-άλγεβρα που παράγεται από τον A. Όμως, όπως έχουμε δείξει (βλ. Πρόταση 35), οι προβολές αυτές ανήκουν στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγει ο A.

Άλγεβρες **von Neumann**

Πόρισμα 42. Κάθε άλγεβρα *von Neumann* είναι η *norm*-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει.

(Μία C^*-άλγεβρα μπορεί να μην έχει μη τετριμμένες προβολές.)

Πόρισμα 43. Αν $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα *von Neumann* που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο *Hilbert*, τότε υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{A}$ προβολών που παράγει την $\mathscr{A}$ ως άλγεβρα *von Neumann*, δηλαδή τέτοιο ώστε $\mathscr{E}'' = \mathscr{A}$.

Αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**

Υπενθύμιση Κάθε αβελιανή C*-άλγεβρα είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $C_0(X)$ για κάποιον τοπικά συμπαγή ‵χώρο Hausdorff (συμπαγή αν-ν η έχει μονάδα).

Στόχος:

Θεώρημα 19. Κάθε αβελιανή άλγεβρα *von Neumann* που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1],\mu)$ για κάποιο *Borel* μέτρο πιθανότητας μ.

Πληροφορία: Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann είναι ισομετρικά *-ισομορφική με κάποιον $L^\infty(\Gamma,\nu)$ όπου Γ τοπικά συμπαγής Hausdorff και ν κανονικό μέτρο Borel.

Αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**

Ορισμός 28. Έστω $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ γραμμικός υπόχωρος και $\xi \in H$. • Το $\xi \in H$ διαχωρίζει τον $\mathscr{S}$ αν $S\xi \neq 0$ για κάθε $S \in \mathscr{S}\setminus\{0\}$. • Το ξ είναι κυκλικό για τον $\mathscr{S}$ αν ο $[\mathscr{S}\xi]$ είναι πυκνός στον H.

Λήμμα 44. *(i)* Αν το ξ είναι κυκλικό για το $\mathscr{S}$ τότε διαχωρίζει τον $\mathscr{S}'$.

(ii) Αν η $\mathscr{M}$ είναι άλγεβρα *von Neumann* και το ξ διαχωρίζει την $\mathscr{M}$ τότε είναι κυκλικό για την $\mathscr{M}'$.

Συνεπώς ένα διάνυσμα είναι κυκλικό για μια άλγεβρα *von Neumann* αν και μόνον αν διαχωρίζει τον μεταθέτη της.

Αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**

Λήμμα 45. Κάθε αβελιανή άλγεβρα *von Neumann* $\mathscr{M}$ που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H έχει διαχωρίζον διάνυσμα ξ. Αν η $\mathscr{M}$ είναι *masa*, τότε το ξ είναι και κυκλικό.

Λήμμα 46. Έστω $\mathscr{M}$ αβελιανή άλγεβρα *von Neumann* σε διαχωρίσιμο χώρο *Hilbert* H. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{M}$ ώστε $\{A\}'' = \mathscr{M}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον A ώστε $0 \le A \le I$.

Μεγιστικές αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**

Έστω $A = A^* \in \mathscr{B}(H)$ με $0 \le A \le I$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi \in H$ μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα για τον A, άρα και για την $\mathscr{M} := \{A\}''$.

Από την Πρόταση 27, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A) \subseteq [0,1]$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_h στον $L^2(\sigma(A),\mu)$ του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_h(g))(x) = xg(x)$. Δηλαδή υπάρχει unitary $U : L^2(\sigma(A),\mu) \to H$ ώστε $A = UM_hU^*$.

Η απεικόνιση $\Phi_u : M_f \mapsto UM_fU^*$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$ επί της $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(H)$.

Συμπέρασμα:

Πρόταση 47. Κάθε *masa* που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1],\mu)$ για κάποιο *Borel* μέτρο πιθανότητας μ. Μάλιστα είναι *unitarily* ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathscr{M}_\mu$.

Αβελιανές άλγεβρες **von Neumann**:

Σχέδιο απόδειξης θεωρήματος 19:

Έστω $\mathscr{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H και $\xi \in H$ μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathscr{M}$.

Αν $H_0 := \overline{\mathscr{M}\xi}$, η απεικόνιση $T \mapsto T|_{H_0} : \mathscr{M} \to \mathscr{B}(H_0)$ είναι 1-1, άρα ισομετρικός *-μορφισμός και η εικόνα του, έστω $\mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{B}(H_0)$ έχει κυκλικό διάνυσμα.

Υπάρχει λοιπόν θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $[0,1]$ και unitary $U : L^2([0,1],\mu) \to H_0$ ώστε η $\Phi_u : M_f \mapsto UM_fU^*$ να απεικονίζει την $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$ ισομετρικά και *-ισομορφικά επί της $\mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{B}(H_0)$.

Έπεται ότι η σύνθεση

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{M} &\to \mathscr{M}_0 \to \mathscr{M}_\mu \\ T &\mapsto T|_{H_0} \mapsto U^*T|_{H_0}U \end{aligned}$$

απεικονίζει την $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(H)$ ισομετρικά και *-ισομορφικά επί της $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$. □

10 Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων και χώρων **Hilbert**

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Αν E_1, E_2 είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, μπορώ να θεωρώ $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$ όπου X_i κάποιο σύνολο (πχ αλγεβρ. ή ο.κ. βάση του E_i). Ορίζω

$$\xi \otimes \eta : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K} : (s,t) \to \xi(s)\eta(t).$$

Προσωρινός Ορισμός (Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο)

$$E_1 \odot E_2 := \operatorname{span}\{\xi \otimes \eta : \xi \in E_1, \eta \in E_2\} \subseteq \mathbb{K}^{X_1 \times X_2}.$$

Παρατήρηση $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, $(\lambda x) \otimes y = \lambda (x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$.

Πρόταση 48. Αν $\{x_i : i \in I\} \subseteq E_1$ γραμμικά ανεξάρτητο και $\{y_j : j \in J\} \subseteq E_2$ γραμμ. ανεξάρτητο, τότε $\{x_i \otimes y_j : (i,j) \in I \times J\} \subseteq E_1 \otimes E_2$.γραμμ. ανεξάρτητο

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Πρόταση 49. Αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in E_1 \odot E_2$. ΤΕΕΙ

(α) $u = 0$.
(β) $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = 0 \in \mathbb{C}$ για κάθε $\phi \in E_1^d, \psi \in E_2^d$.
(γ) $\sum_i \phi(x_i) y_i = 0 \in E_2$ για κάθε $\phi \in E_1^d$.
(δ) $\sum_i \psi(y_i) x_i = 0 \in E_1$ για κάθε $\psi \in E_2^d$.

Παρατήρηση Αρκεί τα ϕ, ψ να ανήκουν σε υπόχωρους των δυικών που χωρίζουν τα σημεία, όπως πχ οι τοπολογικοί δυικοί, όταν οι E_1 και E_2 είναι τοπικά κυρτοί χώροι.

Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x,y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$: Δηλ. αν $\pi : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2 : (x,y) \to x \otimes y$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "b"'] & E_1 \odot E_2 \arrow[dl, "B"] \\ F & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

$$\operatorname{bil}(E_1 \times E_2, F) \simeq \mathscr{L}(E_1 \odot E_2, F).$$

Μοναδικότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Έστω G_1, G_2 δυο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και $\pi_i : E_1 \times E_2 \to G_i$ $(i = 1,2)$ διγραμμικές απεικονίσεις. Υποθ: για κάθε γραμμ. χώρο F και διγραμμική $b : E_1 \times E_2 \to F$, υπάρχουν μοναδικές γραμμ. απεικονίσεις $B_i : G_i \to F$ $(i = 1,2)$ ώστε $B_i \circ \pi_i = b$ $(i = 1,2)$.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr, "\exists ! B_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "b"] & G_2 \arrow[dl, "\exists ! B_2"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Τότε $\exists$ γραμμ. ισομορφισμός $\phi : G_1 \to G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$:

$$\begin{tikzcd} & E_1 \times E_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ G_1 \arrow[rr, "\phi"'] & & G_2 \end{tikzcd}$$

Ορισμός του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Έπεται ότι ο προσωρινός ορισμός δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$: Αν G είναι γραμμικός χώρος και $\otimes' : E_1 \times E_2 \to G$ διγραμμική απεικόνιση ώστε το $(G, \otimes')$ να έχει την καθολική ιδιότητα, τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : E_1 \odot E_2 \to G$ ώστε $T(x \otimes y) = x \otimes' y$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Ορισμός 29. Το Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο δυο $\mathbb{K}$ γραμμικών χώρων E_1 και E_2 είναι ο μοναδικός (ως προς γραμμικούς ισομορφισμούς) γραμμικός χώρος $E_1 \odot E_2$ που εφοδιάζεται με μια διγραμμική απεικόνιση $\otimes : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2$ με την καθολική ιδιότητα:

Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x,y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$:

Παρατήρηση $E \odot \mathbb{K} \simeq E : x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$ και $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n : x \otimes e_i \mapsto (0 \ldots, 0, x, 0 \ldots, 0)$.

Εφαρμογή: Τελεστές πεπερασμένης τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, θέτουμε $E_2 = K$ και E_1 τον χώρο H^* των συνεχών γραμμικών μορφών $H \to \mathbb{K} : z \to \langle z, x \rangle$. Τότε ο H ταυτίζεται γραμμικά με τον υπόχωρο του αλγεβρικού δυικού E_1^d του H^*, που αποτελείται από τις γραμμ. μορφές $\phi_z : E_1 \to \mathbb{K}$ $(z \in H)$ της μορφής $\phi(x^*) = \langle z, x \rangle$.

Κάθε $u = \sum_i x_i^* \otimes y_i \in H^* \odot K$ ορίζει

$$\hat{u} : H \to K : z \mapsto \sum_i \langle z, x_i \rangle y_i := \sum_i y_i x_i^*(z).$$

Αντίστροφα κάθε φραγμένος τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : H \to K$ είναι της μορφής $T = \hat{u}|_H$ όπου $u \in H^* \odot K$ και η $u \to \hat{u}$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Συμπέρασμα: $H^* \odot K \simeq \mathscr{F}(H,K)$.

Επίσης $H^* \odot H \simeq \mathscr{B}_\sim(H)$ μέσω της απεικόνισης $\sum_i x_i^* \otimes y_i \mapsto \sum_i \omega_{y_i,x_i}$

Τανυστικά γινόμενα γραμμ. χώρων και **Hilbert**

Ορισμός 30. Έστω H_1, H_2 χώροι *Hilbert*. Στον $H_1 \odot H_2$ θέτω

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Ορίζει εσωτ. γινόμενο. (Άσκηση!) Ορίζουμε

$$H_1 \otimes H_2 := \overline{(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})}.$$

Αν $\{e_i\}_I$ ο.κ. βάση του H_1 και $\{f_j\}_J$ ο.κ. βάση του H_2, ο $H_1 \otimes H_2$ έχει ο.κ. βάση $\{e_i \otimes f_j\}_{I\times J}$.

Παρατήρηση Όταν $\dim H_1 < \infty$ και $\dim H_2 < \infty$, τότε $H_1 \odot H_2 = H_1 \otimes H_2$.

Παράδειγμα $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\pi)$ όπου π μέτρο γινόμενο.

Παράδειγμα $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.