ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

Για τις ΑΣΚΗΣΕΙΣ V

Ορισμός 1. *Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Στον $H_1 \odot H_2$ θέτω*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ και $v = \sum_i x_i' \otimes y_i'$ τότε

$$\langle u, v \rangle_{hs} = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j' \rangle_{H_1} \cdot \langle y_i, y_j' \rangle_{H_2}.$$

Ονομάζουμε $H_1 \otimes H_2$ την πλήρωση του χώρου $(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|u\|_{hs} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{hs}}$.

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}$ είναι καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $H_1 \odot H_2$.*

Σχέδιο λύσης: Α' μέθοδος Πρώτα σταθεροποιούμε ένα $(x_2, y_2) \in H_1 \times H_2$ και παρατηρούμε ότι, από την Καθολική Ιδιότητα, η

$$B : H_1 \odot H_2 \to \mathbb{C} : x_1 \otimes y_1 \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$$

επάγει μια καλά ορισμένη γραμμική μορφή, διότι η $H_1 \times H_2 \to \mathbb{C} : (x_1, y_1) \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$ είναι διγραμμική. Έχουμε λοιπόν, αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in H_1 \odot H_2$,

$$B(u) = \sum_i \langle x_i, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_i, y_2 \rangle_{H_2}$$

ανεξάρτητα από την παράσταση του $u \in H_1 \odot H_2$ ως $u = \sum_i x_i \otimes y_i$. Έτσι έχουμε μια καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση

$$u = \sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \langle u, v \rangle_{hs} = B\left(\sum_i x_i \otimes y_i \right) = \sum_i \langle x_i, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_i, y_2 \rangle_{H_2} \quad \text{όταν } v = x_2 \otimes y_2\,.$$

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε ένα $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in H_1 \odot H_2$ και θεωρούμε την

$$c : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C} : (x_2, y_2) \mapsto \sum_i \overline{\langle x_i, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_i, y_2 \rangle_{H_2}}$$

η οποία είναι διγραμμική (γιαυτό πήραμε μιγαδικό συζυγή), άρα, πάλι απ' την Καθολική Ιδιότητα, επάγει μια γραμμική

$$C : H_1 \odot H_2 \to \mathbb{C} : x_2 \otimes y_2 \mapsto \sum_i \overline{\langle x_i, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_i, y_2 \rangle_{H_2}}\,.$$

Δηλαδή για κάθε $v = \sum_j x_j' \otimes y_j'$ η

$$C(v) = \sum_{i,j} \overline{\langle x_i, x_j' \rangle_{H_1} \langle y_i, y_j' \rangle_{H_2}}$$

είναι καλά ορισμένη και η $v \to C(v)$ είναι γραμμική. Επομένως για κάθε $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in H_1 \odot H_2$ η

$$v = \sum_j x_j' \otimes y_j' \mapsto \langle u, \sum_j x_j' \otimes y_j' \rangle_{hs} = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j' \rangle_{H_1} \langle y_i, y_j' \rangle_{H_2}$$

είναι αντιγραμμική. Παρατηρούμε τέλος ότι για κάθε $v = \sum_j x_j' \otimes y_j' \in H_1 \odot H_2$ η απεικόνιση

$$u = \sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \langle \sum_i x_i \otimes y_i, v \rangle_{hs} = \sum_j \left(\sum_i \langle x_i, x_j' \rangle_{H_1} \langle y_i, y_j' \rangle_{H_2} \right) = \sum_j \langle u, x_j' \otimes y_j' \rangle_{hs} := \sum_j B_j(u)$$

είναι γραμμική, γιατί είναι άθροισμα των απεικονίσεων B_j που είναι γραμμικές (από το πρώτο βήμα).

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_{hs}$ είναι μια καλά ορισμένη sesquilinear μορφή στο $H_1 \odot H_2$. Είναι προφανές απ' τον ορισμό της ότι $\langle v,u\rangle_{hs} = \overline{\langle u,v\rangle_{hs}}$ για κάθε u,v.

Δείχνουμε ότι $\langle u,u\rangle_{hs} \geqslant 0$: Αν $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1,\dots,m\}$ του υποχώρου span$\{y_i : i = 1,\dots,n\} \subseteq H_2$. Ξέρουμε ότι υπάρχουν (μάλιστα, μοναδικά) $\{\xi_k\} \subseteq H_1$ ώστε $u = \sum_{k=1}^m \xi_k \otimes e_k$ οπότε (αφού το $\langle u,u\rangle_{hs}$ είναι ανεξάρτητο της παράστασης του u),

$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle_{hs} &= \sum_{k,l} \langle \xi_k,\xi_l\rangle_{H_1} \langle e_k,e_l\rangle_{H_2} \\ &= \sum_{k,l} \langle \xi_k,\xi_l\rangle_{H_1} \delta_{k,l} \\ &= \sum_k \langle \xi_k,\xi_k\rangle_{H_1} = \sum_k \|\xi_k\|_{H_1}^2 \geqslant 0\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο υπολογισμό, αν $\langle u,u\rangle_{hs} = 0$ τότε κάθε $\|\xi_k\|_{H_1}^2$ μηδενίζεται, οπότε $u = \sum_{k=1}^m 0 \otimes e_k = 0$.

Β' μέθοδος Ξέρουμε ότι η απεικόνιση $\Phi : H_1^* \odot H_2 \to \mathcal{FB}(H_1,H_2) : x^* \otimes y \mapsto yx^*$ επάγει καλά ορισμένο ισομορφισμό γραμμικών χώρων. Τροποποιούμε λίγο την κατασκευή:

Μέσω της επιλογής μιας ορθοκανονικής βάσης $\{e_j\}$, ταυτίζουμε τον H_1 με τον $\ell^2(J)$ και για κάθε $x = (x(j)) \in H_1$ θεωρούμε (αντί της x^*) τη συνεχή γραμμική μορφή $\hat{x} : z \to \sum_j x(j)z(j)$ και τον τελεστή πρώτης τάξης $y\hat{x} : H_1 \to H_2 : z \mapsto \hat{x}(z)y$. [1] Το πλεονέκτημα είναι ότι τώρα η απεικόνιση $(x,y) \mapsto y\hat{x}$ είναι *διγραμμική*.

Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση της $\Phi : H_1^* \odot H_2 \to \mathcal{FB}(H_1,H_2)$, ότι η απεικόνιση

$$\tilde{\Phi} : H_1 \odot H_2 \to \mathcal{FB}(H_1,H_2) : u = \sum_i x_i \otimes y_i \to \sum_i y_i \hat{x}_i$$

είναι καλά ορισμένος ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Όμως ο γραμμικός χώρος $\mathcal{FB}(H_1,H_2)$ είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle S,T\rangle_{HS} := \text{tr}(T^*S), \quad S,T \in \mathcal{FB}(H_1,H_2)$$

(έχουμε $T^* \in \mathcal{FB}(H_2,H_1)$, άρα $T^*S \in \mathcal{FB}(H_1,H_1)$ και το ίχνος υπολογίζεται στον $\mathcal{FB}(H_1,H_1)$).

Επομένως μπορούμε να "μεταφέρουμε" το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS}$ του $\mathcal{FB}(H_1,H_2)$ μέσω της $\tilde{\Phi}$ σε μια απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle_{hs} : H_1 \odot H_2 \to \mathbb{C}$ η οποία είναι εσωτερικό γινόμενο! Το μόνο που χρειάζεται να επιβεβαιώσουμε είναι ότι το εσωτερικό αυτό γινόμενο ικανοποιεί

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2\rangle_{hs} = \langle x_1,x_2\rangle_{H_1} \langle y_1,y_2\rangle_{H_2}.$$

Πράγματι: Αν $u = x_1 \otimes y_1$ και $v = x_2 \otimes y_2$ έχουμε $\tilde{\Phi}(u) = y_1\hat{x}_1$ και $\tilde{\Phi}(v) = y_2\hat{x}_2$ οπότε

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}(u),\tilde{\Phi}(v)\rangle_{HS} &= \text{tr}(\tilde{\Phi}(v)^*\tilde{\Phi}(u)) \\ &= \sum_j \langle \tilde{\Phi}(v)^*(\tilde{\Phi}(u)(e_j), e_j\rangle_{H_1} = \sum_j \langle \tilde{\Phi}(u)(e_j), \tilde{\Phi}(v)(e_j)\rangle_{H_2} \\ &= \sum_j \langle y_1\hat{x}_1(e_j), y_2\hat{x}_2(e_j)\rangle_{H_2} = \sum_j \langle y_1 x_1(j), y_2 x_2(j)\rangle_{H_2} \\ &= \sum_j x_1(j)\overline{x_2(j)} \langle y_1,y_2\rangle_{H_2} = \langle x_1,x_2\rangle_{H_1}\langle y_1,y_2\rangle_{H_2}\end{aligned}$$

όπως θέλαμε!

[1] "Γινόμενο πινάκων": $y\hat{x} : [z(j)]^t \mapsto [y(j)]^t[x(j)][z(j)]^t$ όπου $[w(j)]^t$ διάνυσμα-στήλη.

Άσκηση 5. *Αν $: H_1 \to K_1$ και $B : H_2 \to K_2$ είναι φραγμένοι τελεστές μεταξύ χώρων Hilbert, δείξτε ότι ορίζεται μοναδικός φραγμένος τελεστής $C : H_1 \otimes H_2 \to K_1 \otimes K_2$ που ικανοποιεί $C(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta$ για κάθε $\xi \in H_1, \eta \in H_2$. Ο τελεστής C ονομάζεται $A \otimes B$.*

Σχέδιο λύσης Παρατηρούμε πρώτα ότι η απεικόνιση $H_1 \times H_2 \to K_1 \odot K_2 : (\xi, \eta) \mapsto A\xi \otimes B\eta$ είναι διγραμμική (γιατί;). Συνεπώς ορίζεται μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $C_0 : H_1 \odot H_2 \to K_1 \odot K_2$ που ικανοποιεί

$$C_0(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta \quad \forall \xi \in H_1, \eta \in H_2\,.$$

Το "μόνο" ζήτημα είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση C_0 είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{hs}$ του χώρου $H_1 \odot H_2$ οπότε θα έχει μοναδική γραμμική επέκταση σε φραγμένο τελεστή $C : H_1 \otimes H_2 \to K_1 \otimes K_2$.

Εμφυτεύοντας (ισομετρικά) τους H_2 και K_2 στον χώρο $H := H_2 \oplus K_2$ και επεκτείνοντας τον B κατάλληλα,[2] μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B \in \mathcal{B}(H)$.

Α' μέθοδος. Θα δείξουμε ότι

$$\|C_0 u\|_{hs} \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \|u\|_{hs} \quad \forall u \in H_1 \odot H$$

δηλαδή ότι η C_0 είναι φραγμένη και μάλιστα $\|C_0\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$. [3]

Έστω $u = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \in H_1 \otimes H$. Θεωρούμε τον υπόχωρο *πεπερασμένης διάστασης*

$$L := \text{span}\{\eta_i, B\eta_i : i = 1, \ldots, n\} \subseteq H,$$

ονομάζουμε P την ορθή προβολή στον L και θέτουμε $D := PBP$. Τότε ο $D^*D = PB^*PBP$ είναι θετικός τελεστής και αφήνει τον υπόχωρο L αναλλοίωτο: $D^*D(L) \subseteq L$. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής $D^*D|_L$ είναι θετικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης. Συνεπώς, από το Φασματικό Θεώρημα για χώρους πεπερασμένης διάστασης, διαγωνοποιείται: υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_j : j = 1, \ldots, m\}$ του L και αριθμοί $\lambda_j \geqslant 0$ ώστε

$$D^*De_j = \lambda_j e_j, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Εφόσον κάθε η_i ανήκει στον $L = \text{span}\{e_j\}$, μπορώ (όπως έχουμε δείξει) να γράψω

$$u = \sum_{j=1}^m x_j \otimes e_j$$

για κατάλληλα $x_j \in H_1, j = 1, \ldots, m$. Παρατηρώ ότι, εφόσον τα $\{e_j\}$ είναι ορθοκανονικά, έχουμε

$$\|u\|_{hs}^2 = \sum_{j=1}^m \|x_j\|_{H_1}^2\,.$$

Έχουμε τώρα $C_0 u = C_0 \left(\sum_j x_j \otimes e_j\right) = \sum_j Ax_j \otimes Be_j$ οπότε

$$\begin{aligned}\|C_0 u\|_{hs}^2 &= \langle \sum_{j=1}^m Ax_j \otimes Be_j, \sum_{k=1}^m Ax_k \otimes Be_k \rangle \\ &= \sum_{j,k} \langle Ax_j \otimes Be_j, Ax_k \otimes Be_k \rangle = \sum_{j,k} \langle Ax_j, Ax_k \rangle \langle Be_j, Be_k \rangle\,.\end{aligned}$$

Αλλά $Be_j = PBPe_j = De_j$ αφού $e_j \in L$ και $Be_j \in L$, άρα

$$\langle Be_j, Be_k \rangle = \langle De_j, De_k \rangle = \langle D^*De_j, e_k \rangle = \langle \lambda_j e_j, e_k \rangle = \lambda_j \delta_{j,k}$$

[2] δηλ. θέτοντας $\tilde{B} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right]$

[3] Επιλέγοντας, για κάθε $\epsilon > 0$, μοναδιαία ξ και η ώστε $\|A\| < \|A\xi\| + \epsilon$ και $\|B\| < \|B\eta\| + \epsilon$ βλέπουμε εύκολα ότι $\|C_0\| \geqslant \|A\| \, \|B\|$, οπότε θα έχουμε δείξει την ισότητα $\|C_0\| = \|A\| \, \|B\|$.

και επομένως το προηγούμενο διπλό άθροισμα γίνεται

$$\sum_{j,k}\langle Ax_j, Ax_k\rangle\langle Be_j, Be_k\rangle = \sum_{j,k}\langle Ax_j, Ax_k\rangle\lambda_j\delta_{j,k} = \sum_{j}\langle Ax_j, Ax_j\rangle\lambda_j$$

οπότε, εφόσον $\lambda_j \leqslant \|D^*D|_L\| \leqslant \|B^*B\| = \|B\|^2$,

$$\|C_0u\|_{hs}^2 = \sum_j \|Ax_j\|^2 \lambda_j \leqslant \sum_j \|A\|^2 \|x_j\|^2 \lambda_j \leqslant \|A\|^2 \|B\|^2 \sum_j \|x_j\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 \|u\|_{hs}^2$$

όπως θέλαμε!

Β' μέθοδος. Θέτοντας $A_1(\xi\otimes\eta) = A\xi\otimes\eta$ και $B_1(\xi\otimes\eta) = \xi\otimes B\eta$, έχουμε καλά ορισμένες γραμμικές απεικονίσεις A_1 και B_1 ορισμένες στο $H_1 \odot H$ που ικανοποιούν $C_0 = A_1B_1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι δυο αυτές απεικονίσεις είναι φραγμένες ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{hs}$.

Αποδεικνύουμε ότι η B_1 είναι φραγμένη (η απόδειξη για την A_1 είναι όμοια).

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι ο τελεστής $B \in \mathcal{B}(H)$ είναι unitary. Τότε για κάθε $\xi_i \in H_1$ και $\eta_i \in H$ έχουμε $\langle B\eta_1, \eta_2\rangle = \langle \eta_1, \eta_2\rangle$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle \xi_1\otimes\eta_1, B_1(\xi_2\otimes\eta_2)\rangle &= \langle \xi_1\otimes\eta_1, \xi_2\otimes B\eta_2\rangle = \langle\xi_1,\xi_2\rangle\langle\eta_1, B\eta_2\rangle = \langle\xi_1,\xi_2\rangle\langle\eta_1,\eta_2\rangle \\ &= \langle \xi_1\otimes\eta_1, \xi_2\otimes\eta_2\rangle\end{aligned}$$

οπότε, λόγω γραμμικότητας, έχουμε $\langle u, B_1v\rangle = \langle u, v\rangle$ για κάθε $u, v \in H_1\otimes H$ και ειδικότερα $\|B_1v\|_{hs} = \|v\|_{hs}$. Δείξαμε δηλαδή ότι η B_1 είναι φραγμένη και μάλιστα $\|B_1\| = 1$.

Όμως γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο μιας C* άλγεβρας (εδώ της $\mathcal{B}(H)$) είναι γραμμικός συνδυασμός το πολύ τεσσάρων unitary τελεστών! Συνεπώς στη γενική περίπτωση, αν $B \in \mathcal{B}(H)$ τότε ο τελεστής B_1 θα είναι φραγμένος (όπως θέλαμε) και μάλιστα $\|B_1\| \leqslant 4$. $\square$

Σχόλιο. Η δεύτερη μέθοδος αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι ο τελεστής C_0 είναι φραγμένος, αλλά δεν δίνει, όπως η πρώτη, την βέλτιστη εκτίμηση $\|C_0\| = \|A\|\,\|B\|$.

Αυτή η εκτίμηση μπορεί όμως να προκύψει και με τη μέθοδο αυτή, αν χρησιμοποιήσει κανείς το γεγονός (Θεώρημα Russo-Dye) ότι κάθε $B \in \mathcal{B}(H)$ με $\|B\| < 1$ είναι, όχι απλώς γραμμικός συνδυασμός, αλλά *μέσος όρος* unitary τελεστών. [4]

[4] Δες πχ. L.T. Gardner, An elementary proof of the Russo-Dye theorem, Proc. AMS Volume 90. Number I, January 1984. Πιό συγκεκριμένα, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $\|B\| < 1-\frac{2}{n}$ για κάποιο $n > 2$, τότε ο B είναι μέσος όρος n unitary τελεστών.