ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

Παράδοση μέχρι την Πέμπτη 10 Οκτωβρίου 2019

1. Αποδείξτε τους επόμενους ισχυρισμούς:

   (α) Αν $\mathcal{X} \subseteq M_n$ είναι μη κενό σύνολο ο **μεταθέτης (commutant)**

   $$\mathcal{X}' := \{b \in M_n : ab = ba \ \forall a \in \mathcal{X}\}$$

   είναι πάντα άλγεβρα (δηλ. γραμ. χώρος και κλειστή στο γινόμενο πινάκων) και περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{1} \in M_n$. Πάντα έχουμε $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{X}')' := \mathcal{X}''$.

   (β) Η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική ανν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.
   (γ) Είναι μεγιστική αβελιανή ανν $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.
   (δ) Παράδειγμα: $\mathcal{A} = D_n$.
   (ε) Υπάρχουν άλλες;

2. Πότε ένα σύστημα τελεστών $\mathcal{S} \subseteq M_n$ είναι της μορφής $\mathcal{S} = \mathcal{S}_G$ για κατάλληλο γράφημα G;
   [Ας θυμηθούμε τις επιπλέον ιδιότητες που έχουν τα συστήματα τελεστών της μορφής $\mathcal{S}_G$.]

3. Θεωρούμε τον χώρο $c_{00} = c_{00}(\mathbb{N})$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|x\|_2 := \left(\sum_n |x(n)|^2\right)^{1/2}$, που προέρχεται απ' το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle := \sum_n x(n)\overline{y(n)}$, και τους γραμμικούς υπόχωρους

   $$E_1 := \{x \in c_{00} : \sum_n x(n) = 0\},$$
   $$E_2 := \{x \in c_{00} : \sum_n \frac{x(n)}{n} = 0\}.$$

   Είναι κι οι δυο γνήσιοι υπόχωροι του c_{00} (κανένας απ' τους δυο δεν περιέχει τα e_k).

   Δείξτε ότι ο E_2 είναι κλειστός, ενώ ο E_1 δεν είναι. [1]

   Για το δεύτερο, ένας τρόπος είναι να δείξει κανείς ότι για κάθε k, το e_k περιέχεται στην κλειστή θήκη του E_1.

   Να συμπεράνετε ότι ο E_1 είναι πυκνός υπόχωρος του c_{00}.

   Δείξτε ότι, παρόλο που ο E_2 είναι κλειστός και γνήσιος υπόχωρος του c_{00}, το μόνο διάνυσμα του c_{00} που είναι κάθετο στον E_2 είναι το 0. [Μια απλή παραλλαγή της μεθόδου που προσπαθήσαμε στην τάξη δουλεύει και για τον E_2.]

[1] Κι αν σας είπε κάποιος το αντίθετο στην τάξη, έκανε λάθος!