29/10/2019

$\mathcal{A} \subseteq \cancel{B(H)}$ C^*-άλγ με 1

$a \in \mathcal{A}$, $a = a^*$

<u>Πρόρ</u> (i) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$

(ii) $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$

Η απεικ

$$\varphi_0 : p \longrightarrow p(a)$$

ικανοποιεί $\|\varphi_0(p)\|_{\mathcal{A}} = \|p\|_{\sigma(a)}$ $(*)$

Έστω $f \in C(\sigma(a))$

τότε από Weierstrass

$\exists$ (p_n) πολυώνυμα:

$p_n \to f$ ομοιόμ $\sigma(a)$

$\Downarrow$

από την $(*)$ η $(p_n(a))$ είναι βασική

διότι

$$\|p_n(a) - p_m(a)\|_{\mathcal{A}} \overset{(*)}{=} \|p_n - p_m\|_{\sigma(a)}$$

άρα συγκλίνει και ονομάζω το όριο:

$$f(a) := \lim_n p_n(a) \text{ στη } \| \, \|_{\mathcal{A}}$$

$$\| \\ \varphi_c(f)$$

καλά ορισμένο διότι

αν $f = \lim q_n$ (q_n) πολυώνυμα

τότε $\|p_n(a) - q_n(a)\|_{\mathcal{A}} \overset{(*)}{=}$

$\|p_n - q_n\|_{\sigma(a)} \longrightarrow 0$,

οπότε $\lim_n q_n(a) = \lim p_n(a)$

Συνεπώς η

$\varphi_0 : p \longrightarrow p(a)$ (p πολ.)

επεκτείνεται σε

$\varphi_c : f \longrightarrow f(c)$ (f συνεχής)

$\varphi_c : (C(\sigma(a)), \| \ \|_{\sigma(a)}) \longrightarrow (A, \| \ \|_A)$

ισομετρία,

και διατηρεί $+$, $\cdot$, $*$ (διότι ισχύουν για πολ/μα)

Η μέθοδος ΔΕΝ επεκτείνεται σε γενικό $a \in A$, ούτε όταν $a^*a = aa^*$ όταν $\sigma(a) \not\subseteq \mathbb{R}$ και δεν είναι πάντα αληθές ότι $\forall f \in C(\sigma(a))$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα.

Στην περίπτωση $a \neq a^*$, όταν $aa^* = a^*a$ χρειάζεται η θεωρία Gelfand για μεταθετικές C^*-άλγεβρες

$A = A^* \in \mathcal{A}$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής

Πρόταση $f(A)$ έχει αντίστροφο στο $\mathcal{A}$

$$\Updownarrow$$

f έχει αντίστροφο στη $C(\sigma(A))$

$$\Updownarrow$$

$$f(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Απόδ. $\Leftarrow$ $f(\lambda) \neq 0$ τότε ορίζεται $g(\lambda) = \dfrac{1}{f(\lambda)}$

οπότε $g \in C(\sigma(A))$

επομένως ορίζεται $g(A) \in \mathcal{A}$

$$\| $$

$$\Phi_c(g)$$

και έχω $fg \overset{\text{ως}}{=} 1 = gf$

$$\Downarrow \Phi_c$$

$$\Phi_c(f)\Phi_c(g) = \Phi_c(1) = \Phi_c(g)\Phi_c(f)$$

$$\| $$

$$1_{\mathcal{A}}$$

άρα ο $\Phi_c(g)$ είναι ο αντίστροφος του $\Phi_c(f) = f(A)$.

Αντίστροφα, $\Rightarrow$ υποθέτω ότι το $f(A) \in \mathcal{A}$ έχει αντίστροφο $B \in \mathcal{A}$ δηλ. $Bf(A) = f(A)B = 1_{\mathcal{A}}$

Πρέπει να δω f έχει αντίστροφο στη $C(\sigma(A))$

δηλ. ότι $f(\lambda) \neq 0$ στο $\lambda \in \sigma(A)$

Αν όχι, υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)$ και $f(\lambda) = 0$

$0 \in \sigma(f)$ οπότε θέλω να συμπεράνω

ότι $f(A)$ δεν έχει αντίστροφο

δηλ. ότι το $0 \in \sigma(f(A))$

Διόρθωση μετά

Αν η f είναι πολυώνυμο θα είχαμε

$$\boxed{\sigma(f(A)) = \{ f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A) \} \ni 0}$$

Αρκεί να το θεώρημα φασματικής απεικόνισης II:

$a = a^* \in A$: C*-άλγεβρα με 1

<u>Θεώρ.</u> $\forall f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = \{ f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a) \}$$

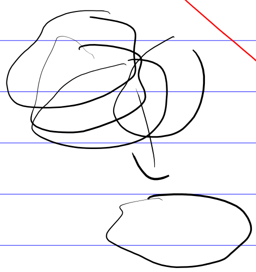
Μήπως, αν πάρω (p_n) από πολυώνυμα:

$p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\sigma(a)$

και επειδή ξέρω ότι

$$\sigma(p_n(a)) = \{ p_n(\lambda) : \lambda \in \sigma(a) \}$$

$$\Downarrow$$



$$\sigma(f(a)) = \{ f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a) \}$$

Ξέρω ότι το $p_n(A) \to f(A)$ στη $\| \cdot \|_A$

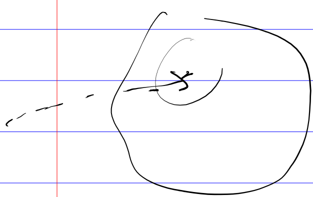
Ξέρω επίσης ότι το $f(A)$ ~~όχι~~ αντιστρέψιμο

και το σύνολο των αντιστρέψιμων

(Α.Π.) είναι <u>ΑΝΟΙΚΤΟ</u>

οπότε $\exists n_0 : n \geq n_0$ $p_n(A)$

να είναι αντιστρέψιμος



όπου $\forall n \geq 0$ $\forall \lambda \in \sigma(a)$, $p_n(\lambda) \neq 0$

$\Longrightarrow f(\lambda) = \lim p_n(\lambda)$??

~~$p_n(A) \to f(A)$~~

ΑΞΙΑ!

<u>Διόρθωση</u> Υποθέτω ότι $\exists \lambda_0 \in \sigma(A)$ ώστε $f(\lambda_0) = 0$

$\exists (p_n)$ πολυώνυμα ώστε $p_n \to f$ ομοιόμ. στο $\sigma(A)$. Οπότε $p_n(\lambda_0) \to f(\lambda) = 0$

Οπότε αν πάρω τα πολυώνυμα $q_n := p_n - p_n(\lambda_0) 1$

έχω ότι $\|q_n - f\|_{\sigma(A)} \leq \|p_n - f\|_{\sigma(A)} + |p_n(\lambda_0)| \to 0$

Επομένως $\|q_n(A) - f(A)\|_A \to 0$. Όμως $q_n(\lambda_0) = 0$ $\forall n$ οπότε q_n όχι αντιστρέψιμο στη $C(\sigma(A))$ άρα $q_n(A)$ όχι αντιστρέψιμο στη A. Επειδή $f(A) = \lim_n q_n(A)$ όχι αντιστρέψιμο, διότι το σύνολο των αντιστρέψ. στη A είναι ανοικτό (Α.Π.)

Εξάρτηση του φάσματος από την άλγεβρα:

Παράδ. Θεωρώ την C^*-άλγ. $B(H)$ με $H = \ell^2(\mathbb{Z})$.

ονομάζω $\mathcal{A}$ = την μικρότερη κλειστή υποάλγ. της $B(H)$ που παράγεται από το $\mathbb{1}$ και το S όπου $S(e_n) = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

Η $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλα τα $p(S)$ (p: πολυώνυμα) και τα όριά τους (στη $\|\ \|_{B(H)}$)

Είναι άλγεβρα Banach, όχι C^*-άλγεβρα.

Το $S \in B(H)$ έχει αντίστροφο, τον S^* <u>στην $B(H)$</u>: $S^*(e_n) = e_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

<u>όμως</u> το $S^* \notin \mathcal{A}$ διότι <u>δεν</u> είναι $\|\ \|$-όριο πολυωνύμων του S

$$S \sim \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \boxed{0} & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & \ddots \end{bmatrix} \qquad p(S) = \begin{bmatrix} \times & & & 0 \\ \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \ \forall p \text{ πολ.}$$

οπότε κάθε $p(S)$ είναι <u>κάτω</u> τριγωνικός.

Άρα και τα όριά τους (στην $\|\ \|$) είναι κάτω τριγωνικά ενώ:

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \boxed{0} & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$ είναι <u>άνω</u> τριγωνικός.