22/10

$T \in \mathcal{B}(H)$ θετ

αν $\forall x \in H \quad \langle Tx, x\rangle \geq 0$

πχ αν $B \in \mathcal{B}(H)$ και $\boxed{T = B^*B}$

τότε

$\langle Tx, x\rangle = \langle B^*(Bx), x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$

$\forall\ B^*B \geq 0$ επίσης

θα δω $\forall\ T \geq 0$ είναι της μορφής

$\forall\ A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται !

$A = A_1 + iA_2 \quad$ όπου $A_i = A_i^*$

$A_1 = \frac{A+A^*}{2}$

$A_2 = \frac{A-A^*}{2i}$

επίσης $\forall\ B = B^*$ γράφεται $\quad B = B_1 - B_2$

$B_i \geq 0$

$\Longrightarrow \forall\ A \in \mathcal{B}(H)$ είναι γρ συνδ 4 θετικών

Σχόλια στο φυλλ I

• $(E, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα και $\varphi : E \to \mathbb{C}$ γραμμική

τότε:

δύο ενδεχόμενα: $\to$ φ συνεχής $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker}\varphi$ κλειστός υπόχωρος

$\to$ φ ασυνεχής $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker}\varphi$ πυκνός

Απόδ (i) φ συνεχής τότε

$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$: κλειστό

(ii) φ ασυνεχής

$\exists (x_n) : \|x_n\| = 1 \quad \varphi(x_n) > n \ \forall n$

νδο $\operatorname{Ker}\varphi$ πυκνός

Έστω $y \in E$ τυχαίο

παρατ. $\quad y\,\varphi(x_n) - x_n\,\varphi(y) \in \operatorname{Ker}\varphi$

διότι: $\varphi(\qquad\qquad)$

$= \varphi(y)\,\varphi(x_n) - \varphi(x_n)\,\varphi(y) = 0$

$\Downarrow$

$(\varphi(x_n) \neq 0)$: $y_n = y - \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)}\, x_n \in \operatorname{Ker}\varphi \ \forall n$

άρα $\quad \|y - y_n\| = \left\| \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x_n)}\, x_n \right\| = \dfrac{|\varphi(y)|}{|\varphi(x_n)|}\, \|x_n\| < \dfrac{|\varphi(y)|}{n}$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Πίνακες:

$a \in M_n(\mathbb{C})$ γράφω $a = [a(i,j)]$

$a : [n] \times [n] \longrightarrow \mathbb{C}$

ορίζω $\operatorname{supp} a = \{ (i,j) \in [n] \times [n] : a(i,j) \neq 0 \}$

$= (\operatorname{null} a)^c$

$\operatorname{null} a = \{ (i,j) \in [n] \times [n] : a(i,j) = 0 \}$

<u>Παρ.</u> $e_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$: 1 στη (i,j) και 0 παντού αλλού

$\{ e_{ij} : (i,j) \in [n] \times [n] \}$ βάση του $M_n(\mathbb{C})$

<u>Παρ.</u>: $\forall a \in M_n(\mathbb{C})$: $\boxed{e_{ii}\, a\, e_{jj} = a(i,j)\, e_{ij}}$

(πράξεις)

$\operatorname{supp} a = \{ (i,j) : e_{ii} a e_{jj} \neq 0 \}$

$\operatorname{null} a = \{ (i,j) : e_{ii} a e_{jj} = 0 \}$

οπότε:

Αν $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ τυχαίο σύνολο

$$(\operatorname{supp} \mathcal{S})^c := \bigcap_{a \in \mathcal{S}} \operatorname{null}(a)$$

$$= \{ (i,j) : e_{ii} a e_{jj} = 0 \ \forall a \in \mathcal{S} \}$$

$$= \{ (i,j) : \exists a \in \mathcal{S} : e_{ii} a e_{jj} \neq 0 \}^c$$

$\{ e_{ii} : i \in [n] \}$ είναι βάση του D_n

↑ ορθές προβολές, $\perp$ ανά δύο (: $e_{ii} e_{jj} = 0$ $\forall i \neq j$)

: D_n ~~είναι~~ ~~ορθ~~ είναι ένα σύστημα αντιμεταθετικών

Αντίστοιχα: Ξεκινάω $\underline{c} \subseteq [n]\times[n]$ $(\neq \emptyset)$
ονομάζω

$$\mathcal{M}(\underline{c}) = \{a \in M_n : \operatorname{supp} a \subseteq \underline{c}\} = \{a \in M_n : a|_{\underline{c}^c} = 0\}$$

Πρότ. $\mathcal{M}(\underline{c})$ είναι D_n-δίπρότυπο:

• είναι γραμμ. υπόχωρος

$a \in \mathcal{M}(\underline{c})$

$\operatorname{supp}(e_{ii}\, a\, e_{jj}) \subseteq \operatorname{supp}(a)$

$\Downarrow$

λόγω γραμμ. $\forall d_1, d_2 \in D_n$

$\operatorname{supp}(d_1\, a\, d_2) \subseteq \operatorname{supp}(a)$

Πρότ. Αν $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ D_n-δίπρότυπο και ονομάσω $\underline{c} = \operatorname{supp}\mathcal{S}$ τότε $\mathcal{S} = \mathcal{M}(\underline{c})$

Απόδ. ~~Ένας~~ Τετριμμένα να δείξουμε: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(\underline{c})$
διότι $\forall a \in \mathcal{S}$ έχει $\operatorname{supp} a \subseteq \operatorname{supp}\mathcal{S} = \underline{c}$
άρα $a \in \mathcal{M}(\underline{c})$

Αντίστροφα: Έστω $b \in \mathcal{M}(\underline{c})$
όπου $\forall (i,j)$ με $b(i,j) \neq 0$ θα ισχύει $(i,j) \in \underline{c}$

Όμως $\underline{c} = \operatorname{supp}\mathcal{S}$ οπότε $\exists a \in \mathcal{S}$ ώστε $a(i,j) \neq 0$
τότε όμως

$$0 \neq a(i,j)\, e_{ij} = e_{ii}\, a\, e_{jj} \Rightarrow \underbrace{e_{ii}\, a\, e_{jj}}_{\text{και } \in \mathcal{S}} \neq 0$$

→ Έδειξα ότι $\forall (i,j) \in \operatorname{supp} b$ τότε το αντίστοιχο e_{ij} ανήκει στο $\mathcal{S}$. Όμως:

$$b = \sum_{(i,j)\in[n]\times[n]} b(i,j)\, e_{ij} \in \mathcal{S}$$ $\boxed{////}$

Γενίκευση Θεωρώ ένα χώρο $H = L^2(\mu)$ μ: μέτρο πιθ.
αντί για την D_n θεωρώ την

$$\mathcal{D} = \{M_f : f \in L^\infty(\mu)\} \quad (M_f g = fg \ \forall g \in H)$$

↑ masa

Μπορώ να μελετήσω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(L^2(\mu))$ που είναι $\mathcal{D}$-δίπρότυπα και να ορίσω τα «φορέα» τέτοιων.

[illegible]

__Πρόβ__ Ένα Π_{--} διαμέρισμα Δ
είναι πλήρως τέλειο
αν το $\operatorname{supp} \Delta$
περιέχει την $\{(i,i) : i \in [n]\} = \Delta$
: και είναι συμμετρικό
$\Longleftrightarrow$ Αν $E = \operatorname{supp} \Delta \setminus \Delta$ θέλω
το E να είναι αυτό ενός γραφήματος

$x \in \mathcal{A}$: άλγ. Banach με $\mathbb{1}$

<u>Ισχ.</u> $\lambda \in \mathbb{C}$: $\underline{|\lambda| > \|x\|}$ τότε $\lambda \notin \sigma(x)$

άρα $\sigma(x)$ φραγ. $\subseteq \overline{B}(0, \|x\|) \subseteq \mathbb{C}$

<u>Απόδ.</u>

τότε $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$

άρα $$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{1 - \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|}$$

άρα η $\sum \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$ συγκλίνει απόλυτα

άρα (πληρότητα) συγκλίνει σε ένα $y \in \mathcal{B}$

$$(\lambda \mathbb{1} - x)\left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right) = \left(\sum \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right)(\lambda \mathbb{1} - x)$$

$$= (\lambda \mathbb{1} - x)\left(\mathbb{1} + \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^N\right)$$

$$= \lambda \mathbb{1} \cancel{- x} + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{\lambda}} + \cancel{\frac{x^2}{\lambda}} - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 x + \dots - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^N x$$

$$= \lambda \mathbb{1} - x\left(\frac{x}{\lambda}\right)^N \xrightarrow[N \to \infty]{} \lambda \mathbb{1} \quad \text{για } \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$$

άρα $(\lambda \mathbb{1} - x)\, y = y\,(\lambda \mathbb{1} - x) = \lambda \mathbb{1}$

$$(\lambda \mathbb{1} - x)\frac{y}{\lambda} = \frac{y}{\lambda}(\lambda \mathbb{1} - x) = \mathbb{1}$$

οπότε $\frac{y}{\lambda} = (\lambda \mathbb{1} - x)^{-1}$

Πρότ. Αν A: C^*-αλγ. με 1 (πχ $A = B(H)$)

και $a \in A$ με $a^*a = aa^*$ τότε

$$\boxed{\rho(a) = \|a\|}$$

Απόδ. $\|a\|^4 \overset{C^*}{=} \|a^*a\|^2 \overset{C^*}{=} \|(a^*a)^2\| = \|a^*a\,a^*a\|$ (φυσ.)

$(*)$ $(a^*)^2 = (a^2)^*$ διότι $a^*b^* = (ba)^*$

$$= \|a^{*2}a^2\| \overset{(*)}{=} \|(a^2)^*a^2\| \overset{C^*}{=} \|a^2\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|a\|^2 = \|a^2\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\| \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\|a\| = \|a^{2^n}\|^{1/2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(a) \leq \|a\|$$ ο.ε.δ.

Λ. Φασματική Απεικόνιση A άλγεβρα με $1 \in A$, $a \in A$

p πολυώνυμο:

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$$

Απόδ. Μπορώ να υποθέσω $p \neq$ σταθ.

Οπότε Έστω $\mu \in \mathbb{C}$ και ορίζω

$q(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ ένα πολυώνυμο

άρα (θεμ. θεμελ. Άλγεβρας)

$q(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$q(a) = c(a - \lambda_1 1) \cdots (a - \lambda_n 1) \in A$$

Αν $\forall (a - \lambda_i 1)$ αντιστρέψιμα τότε $q(a)$ αντιστρέψιμο

αν $\exists (a - \lambda_i 1)$ όχι αντιστρέψιμο τότε $q(a)$ δεν αντιστρ.

Οπότε: αν $\exists \lambda_i$ ρίζα του q:

ώστε $\lambda_i \in \sigma(a)$ τότε $q(a)$ δεν αντιστρέψιμο

και αντίστροφα:

Οπότε: $q(a)$ αντιστρέψιμο ($\Longleftrightarrow p(a) - \mu 1 \in Inv(A)$)

$$\Updownarrow$$

$\forall \lambda_i$ ρίζα του q: $\lambda_i \notin \sigma(a)$

άρα:

$\mu \in \sigma(p(a)) \Longleftrightarrow \exists \lambda_i$ με $p(\lambda_i) - \mu = q(\lambda_i) = 0$ ώστε $\lambda_i \in \sigma(a)$

$\Longleftrightarrow \mu \in p(\sigma(a))$.

Λήμμα Αν A C^*-αλγ, με 1 και $a = a^* \in A$ τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$

Απόδ Έστω $\lambda + i\mu \in \sigma(a)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ΝΔΟ $\mu = 0$

Υποθέτουμε $\mu \neq 0$

Το:

$$a - (\lambda + i\mu)1 = \mu\left(\frac{a - \lambda 1}{\mu} - i1\right) \text{ όχι αντιστρ.}$$

όπως αν θέσω $b = \frac{a - \lambda 1}{\mu}$ και $i \in \sigma(b)$.

Αν $i \in \sigma(b)$ και $n1 - ib - (n+1)1 = -i(b - i1)$ όχι αντιστρέψ.

οπότε $n + 1 \in \sigma(n1 - ib)$, άρα:

$$|n+1|^2 \leq \|n1 - ib\|^2 \overset{C^*}{=} \|(n1 - ib)^*(n1 - ib)\|$$

$$= \|(n1 + ib)(n1 - ib)\| = \|n^2 + b^2\| \leq n^2 + \|b^2\|$$

$$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + \|b\|^2 \Rightarrow 2n + 1 \leq \|b\|^2 \quad \forall n$$

άτοπο

Θεώρημα: Έστω A C^*-άλγ με 1 και $a = a^* \in A$.
Τότε $\forall$ p πολυώνυμο

$$\|p(a)\|_A = \sup\{\,|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|p\|_{\sigma(a)}$$

(Απόδ: Σε λίγο)

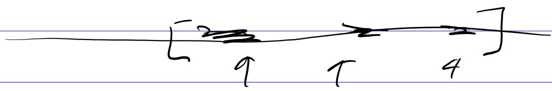
$\forall$ p πολ $\in (C(\sigma(a)), \|\ \|_{\sigma(a)}) \longrightarrow (A, \|\ \|_A)$

$$\varphi_p : p \longmapsto p(a)$$

Είναι ισομετρία

Προφανώς φ_p είναι γραμμική

άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομ
στη $\|\cdot\|_{\sigma(a)}$-κλειστή θήκη των
πολυωνύμων. η οποία είναι
(από Weierstrass)
η $C(\sigma(a))$



$\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$

$\varphi_a : (C(\sigma(a)), \|\ \|_{\sigma(a)}) \longrightarrow (A, \|\ \|_A)$
γραμμική και ισομετρία

$\forall f \in C(\sigma(a))$ έχω $\varphi_a(f) \in A$
τ.ω.
αν $f = p$ πολυώνυμο
$\varphi_a(f) = \varphi_p(p) = p(a)$
γενικά $\varphi_a(f) = f(a)$

Σχόλιο: Έστω $f \in C(\sigma(a))$
Παίρνω (οποιαδήποτε) ακολουθία (p_n)
από πολυώνυμα με $p_n \to f$ ομοιόμορφα
στο $\sigma(a)$ (W.)
και ορίζω $f(a) = \lim_n p_n(a)$ ✓

(διότι η $(p_n(a))$ είναι $\|\ \|_A$-βασική
διότι $\|p_n(a) - p_m(a)\|_A = \|p_n - p_m\|_{\sigma(a)}$.)

Αποδ ζητήματος:

<u>Ν.δ.ο.</u> $\|p(a)\|_{\mathcal{A}} = \|p\|_{\sigma(a)}$

Περίπτωση (1): $p =$ πολυώνυμο με πραγμ. συντελ.

τότε αφού $a = a^*$

έπεται $p(a) = p(a)^* \in \mathcal{A}$

όμως $\|p(a)\| = \sup\{\mu : \mu \in \sigma(p(a))\}$

αλλά $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, άρα $\quad \|$

$= \sup\{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$

$\|$

$\|p\|_{\sigma(c)}$

Περίπτωση (2)

Αν p τυχαίο πολ/ο αρ. θέτω $q = \bar{p} \cdot p = p^* p$

όπως το q παίρνει πραγμ. τιμές

να γράψω το a

όπως το ισχύει $q(a) = q(a)^*$

~~όμως~~ να άρα από τη περίπτωση 1

$\|q(a)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\}$

$= \sup\{|p(\lambda)|^2 : \lambda \in \sigma(a)\}$

$= \|p\|^2_{\sigma(a)}$

(C*) $\|p(a)^* p(a)\| = \|p(a)\|^2$ $\quad$ | οπότε $\|p(a)\| = \|p\|_{\mathcal{A}}$

Παρατ. Δεν χρειάζεται να διακρίνω περιπτώσεις

$\forall p$ πολυώνυμο, έχουμε $aa^* = a^*a$, έπεται ότι

αν $b = p(a)$, ισχύει $b^*b = bb^*$,

Οπότε ξέρω ότι $\|b\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(b)\}$

$= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(a))\}$

Όμως από Θ. φασμ. απεικόνισης: $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$

άρα $\|p(a)\|_{\mathcal{A}} = \|b\|_{\mathcal{A}} = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\}$

$= \|p\|_{\sigma(a)}$ $\blacksquare$