1/10/2015

Γράφημα

(κορυφή ακμές)

$G = (V, \mathcal{E})$

↑ ξερό σύνολο (πεπερ.)

$\mathcal{E} \subseteq V \times V$ σχέση συμμετρική

$(i,j) \in \mathcal{E} \Longrightarrow (j,i) \in \mathcal{E}$

Αν $n = |V|$ υπόθεσ $V = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Ορίζουμε: $i \simeq j \Leftrightarrow (i,j) \in \mathcal{E}$ ή $i = j$

$\rightarrow \mathcal{S}_G = \cancel{\{ [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) : a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (i,j) \in \mathcal{E} \}} \cup \{I_n\}$

ΛΑΘΟΣ
ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ
γρ. χώρος !

$$\begin{array}{cc} (i,j)\in\mathcal{E} & (i,j)\notin\mathcal{E} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} * & & * & & 0 \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \\ & & & & & * \end{bmatrix}$$

$\mathcal{S}_G =: \{ [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) :$
$a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \simeq j \}$

Κλασικά:

$$G = (V, \mathcal{E}) \longrightarrow A_G = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (i,j)\in\mathcal{E} & (i,j)\notin\mathcal{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & & 0 & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$\in M_n(\mathbb{Z}_2) = \{0, 1\}$

Πρτρ 1 Το σύνολο $\mathcal{S}_G \subseteq M_n(\mathbb{C})$ είναι:

σύστημα τελεστών = operator system

- γραμμικός χώρος (γιατί; ναι!)
- $a=[a_{ij}]\in \mathcal{S} \Longrightarrow a^*=[\bar{a}_{ji}]\in \mathcal{S}$
- $I_n \in \mathcal{S}_G$

$a\in M_n(\mathbb{C}) \rightsquigarrow$ τελεστής στον Ευκλείδειο χώρο $\ell^2(n)=(\mathbb{C}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$

Πρτρ: $a^*=[\bar{a}_{ji}]$ ικανοποιεί:

$$\boxed{\langle a^*\xi,\eta\rangle=\langle\xi,a\eta\rangle \quad \forall \xi,\eta\in\mathbb{C}^n}$$

απόδ: Ξέρω ότι ae_j = η j-στήλη του πίνακα, άρα $\langle ae_j,e_i\rangle=a_{ij}$ οπότε:
αν $b=a^*$, έχω $\langle be_j,e_i\rangle=b_{ij}=\bar{a}_{ji}=\overline{\langle ae_i,e_j\rangle}=\langle e_j,ae_i\rangle$ $\forall i,j$, οπότε λόγω γραμμ.: $\langle b\xi,\eta\rangle=\dots=\langle\xi,a\eta\rangle$ $\forall\xi,\eta\in\mathbb{C}^n$

Πρτρ 2 Ονομάζω $D_n=\{[b_{ij}]\in M_n(\mathbb{C}) : b_{ij}=0 \ \forall i\neq j\}$

Πρτρ $D_n\mathcal{S}_G\subseteq \mathcal{S}_G$ και $\mathcal{S}_G D_n\subseteq\mathcal{S}_G$ (γιατί, και!)

άρα: $\boxed{D_n\mathcal{S}_G D_n\subseteq\mathcal{S}_G}$

Απόδ. πρτρ $\mathcal{S}_G=\text{span}\{E_{ij} : (i,j)\in E\}\cup\{I_n\}$

και

$D_n=\text{span}\{E_{ii} : i\in[n]\}$

έχω $E_{ii}E_{kj}=E_{ij}\delta_{ik}$, $E_{kj}E_{ii}=E_{ki}\delta_{ji}$ άρα (εύκολα)

δηλαδή: $\mathcal{S}_G$ είναι διπρότυπο (bimodule) πάνω στην άλγεβρα D_n

D_n = σύστημα τελεστών $=\mathcal{S}_\Delta$ όπου $\Delta=(V,E_\Delta)$, $E_\Delta=\{(i,i) : i\in V\}$

και δακτύλιος: δηλ. αν $a,b\in D_n$ τότε $ab\in D_n$ (γινόμενο πινάκων)

$G=(V,E) \longrightarrow \mathcal{A}_G = \mathrm{span}\{E_{ij} : \overset{i \simeq j}{\cancel{(i,j)\in E\} \cup \{I_n}}\}$

- $\mathcal{A}_G$: σύστημα τελεστών

  δηλ. $\mathcal{A}_G^* = \mathcal{A}_G$ και $I_n \in \mathcal{A}_G$

- $\mathcal{A}_G$: διπρότυπο στη διαγώνια άλγεβρα D_n. τώρα, ναι!

"μη-μεταθετικό γράφημα"

ενίοτε "κβαντικό γράφημα"

Άλλη προσέγγιση: $\mathcal{A}_G' = \{[a_{ij}] : a_{ij} \neq 0 \Leftarrow (i,j)\in E \text{ ή } i=j\}$

το ίδιο είναι, τώρα!

$= \mathcal{A}_G \cup D_n$

δηλ: $\mathcal{A}_G' = \mathcal{A}_{G'}$ με $G' = (V, E \cup \Delta)$

Lovász :

θετ. ημιορ

$$\vartheta(G) = \max\{ \underbrace{\|I_n + T\|}_{\text{μέγιστη ιδιοτιμή}} : I_n+T\geq 0 \text{ και } T_{ij}=0 \ \forall (i,j)\in E \text{ ή } i=j \}$$

$\vartheta(G)$ ορίζεται $\forall\, S_G$ αλλά και $\forall$ σύστημα τελεστών

S: $\quad \vartheta(S) := \max\{ \|I_n+T\| : I_n+T \geq 0 \text{ και } T \perp S \}$

τι σημαίνει "κάθετο";

Άσκηση (ακρίβεια των λέξεων)

~~Ερώτημα~~ Έστω $S \subseteq M_n$ σύστημα τελεστών

Πότε $\exists\, G$ γράφημα ώστε

$$S = S_G$$

Θέλω να βρω/ ~~συμπληρωτική~~ σχέση E στο σύνολο $V=[n]$

ώστε $a \in S \iff a \in \operatorname{span}\{E_{ij} : (i,j) \cancel{\in E}\ i \simeq j\}$ $\cancel{\cup \{I_n\}}$

Θυμίζω:

$a = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ~~θετικά ημιορισμένος~~ θετικός

όταν: $\forall\, \xi \in \ell^2(n)$ ισχύει $\langle a\xi, \xi\rangle \geq 0$

δηλ.:

$\forall\, \xi = (\xi(i)) \in \ell^2(n)$

ισχύει $\quad \sum_{i,j} a_{ij}\, \xi_j\, \bar{\xi}_i \geq 0$

Γενικότερα έστω $\mathcal{A} \le M_n$: $*$-υπάλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$

κλειστή ως προς γινόμενο πινάκων (: άλγεβρα) και κλειστή ως προς $a \to a^*$

ορίζω $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^c$ = μεταθέτης (commutant)

$:= \{ b \in M_n(\mathbb{C}) : ab = ba \ \forall a \in \mathcal{A} \}$

: επίσης $*$-υπάλγεβρα και $I \in \mathcal{A}$

και μάλιστα $\boxed{\mathcal{A}'' := (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}}$ wow!!

(άσκηση;)

Παράδ. $\mathcal{A} = M_n$: $\mathcal{A}' = \mathbb{C} I_n = \{ \lambda I_n : \lambda \in \mathbb{C} \}$

(άσκηση)

Παράδ. $\mathcal{A} = D_n \le D_n'$ στην πραγματικότητα : $D_n = D_n'$

(άσκηση)

Ισοδύναμα : η $D_n \le M_n$ είναι μεγιστική αβελιανή $*$-υπάλγεβρα.

(άσκηση)

masa!

Γενικότερος ορισμός (Nik Weaver)

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια $*$-υπάλγ με I_n (της M_n) τότε μια ΚΒΑΝΤΙΚΗ $\mathcal{A}$-ΣΧΕΣΗ είναι ένας γρ. υπόχωρος $\mathcal{V} \subseteq M_n$ που είναι $\mathcal{A}'$-διπρότυπο

δηλ. $\forall b \in \mathcal{A}' \ \forall v \in \mathcal{V}$

$bv, vb \in \mathcal{V}$

Πχ κάθε Δ_G είναι $\mathcal{D}$-κβαντική σχέση και συμμετρική

κάθε ~~κάθε~~ οποιοσδήποτε $\mathcal{V}$ υπόχωρος του M_n είναι M_n-κβαντική σχέση

(διότι $\forall b \in M_n' \ \forall v \in \mathcal{V}$ θέλω $bv, vb \in \mathcal{V}$

όμως $b = \lambda I_n$, οπότε θέλω $\lambda v \in \mathcal{V}$

που ισχύει, αφού $\mathcal{V}$: υπόχωρος

Μικρολιά

(1) Ευκλείδειος χώρος : V = $\mathbb{C}$-γραμμικός χώρος (πεπερ. διάστασης)

εφοδιασμένος με ένα εσωτ. γινόμενο

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

Κάθε τέτοιος έχει μια ο.κ. βάση

$\{e_i : i \in I\}$ $\quad |I| < \infty$ (V

δηλ (i) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

(ii) είναι βάση του χώρου

δηλ $\forall\ \xi \in V$ γράφεται μοναδικά:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi(i) e_i \quad , \text{όπου } \xi(i) \in \mathbb{C}$$

και μάλιστα ξέρω να βρω τα $\xi(i)$:

$$\langle \xi, e_j \rangle = \left\langle \sum \xi(i) e_i, e_j \right\rangle \overset{(i)}{=} \sum_i \xi(i) \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \xi(j)$$

Θα ήταν ενδιαφέρον να ελέγξω τι γίνεται όταν ο V δεν έχει πεπερασμένη διάσταση

Τότε, χρειάζεται (πολύ!!!) να επιβάλω επιπλέον ιδιότητα στο V: ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ:

πρώτα αν θέσω

$$\|\xi\| = (\langle \xi, \xi \rangle)^{1/2} \quad \xi \in V$$

τότε λόγω της Cauchy-Schwarz

ισχύει: $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στο V

οπότε $(V, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα

Όταν $\forall$ ακολουθία (ξ_n) από $\xi_n \in V$ που είναι $\|\cdot\|$-βασική έχει όριο μέσα στο V

τότε ο V λέγεται HILBERT

(πρώτα αν $\dim V < \infty$ τότε είναι από πριν χώρος Hilbert)

Αν είναι απειροδιάστατος;

1ο παράδειγμα: $V = \{(q_i) : q_i \in \mathbb{Q}\}$ όχι $\mathbb{C}$ γραμμ-χώρος

2ο παράδειγμα: $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής$\}$

με $\langle f, g \rangle = \int f(t)\overline{g(t)}\,dt$

γραμμ. ως προς f αντιγρ. ως προς g

και $\langle f, f \rangle = \int |f|^2 \geq 0$

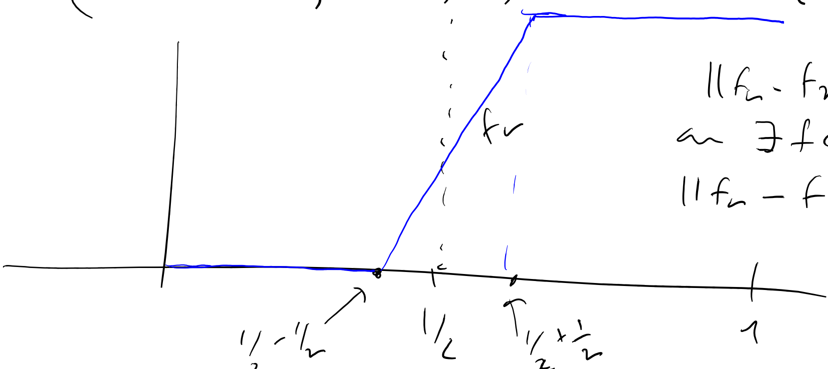
$\langle f, f \rangle = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f = 0$

Απόδ: Αν $f(t_0) \neq 0$ τότε $|f(t_0)| = \delta > 0$ οπότε $\exists$ περιοχή V του t_0 ώστε $|f(s)| > \frac{\delta}{777}$ $\forall s \in V$

άρα $\int |f|^2 \geq \int_V |f|^2 \geq \left(\frac{\delta}{777}\right)^2 m(V) \neq 0$

μήκος του V

$(C([0,1]), \langle \cdot , \cdot \rangle)$: με $\| \cdot \|_2$ όχι πλήρης βασικά



$\|f_n - f_m\|_2$: μικραίνουν

αν $\exists f \in C([0,1])$

$\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$

Εύκολα δείχνουμε ότι $\|f_n - f_m\|_2$ "μικραίνουν" καθώς $n, m \nearrow$. Όμως αν υπήρχε $f \in C[0,1]$ ώστε $\|f_n - f\|_2 \longrightarrow 0$ τότε μπορείς να δείξεις (ασκ) ότι θα έπρεπε $f(t) = 0$ για $t < 1/2$ και $f(s) = 1$ για $s > 1/2$ που αντιβαίνει στη συνέχεια της f

Παράδ $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a(n))_{n\in\mathbb{N}} : a(n)\in\mathbb{C} \text{ και } \sum |a(n)|^2 < +\infty \right\}$

Ένα Hilbert με

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\overline{b(n)}$$

(το μαθαίνουμε στην Πραγματική)

Παράδειγμα: κοιτάζω τον υπόχωρο:

$$c_{00} = \left\{ (a(n)) : a(n)=0 \text{ εκτός από πεπερ. πλήθος } n \right\}$$

$$= \left\{ (a(n)) : \exists n_a \in \mathbb{N} : \forall n > n_a,\ a(n)=0 \right\}.$$

με το ίδιο εσωτ. γινόμενο

ΟΧΙ πλήρης

Απόδ Πάρε την $\xi = \left(\frac{1}{n}\right)$ ισχύει ότι $\xi \in \ell^2$

αλλά $\xi \notin c_{00}$ και ορίζω:

$\xi_m = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots)$ τότε

$$\forall\, \xi_m \in c_{00}$$

και ΠΡΟΦΑΝΩΣ

$$\|\xi - \xi_m\|_2 = \left(\sum_{n>m} \left|\frac{1}{n}\right|^2 \right)^{1/2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

(ξ_m) συγκλίνει ΚΑΠΟΥ

ως προς $\|\ \|_2$

αλλά το ΚΑΠΟΥ $\notin c_{00}$

άρα η (ξ_m) είναι βασική ως $\|\ \|_2$

αλλά δεν συγκλίνει.