Θεώρημα Stinespring

Θεώρημα 1 (Stinespring)**.** *Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \textit{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & \mathcal{B}(H) \\
& \mathcal{B}(K) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{ad}\, V^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη

1. Για να φτιάξουμε τον χώρο Hilbert H_ϕ, θεωρούμε πρώτα τον γραμμικό χώρο

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N}) &= c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A}) = \{\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathcal{A} : \mathrm{supp}\,\vec{a} \;\; \text{πεπερ.}\} \\ &= \mathrm{span}\{a \otimes e_n : a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

   όπου

$$(a \otimes e_j)(n) := \begin{cases} a & n = j \\ 0 & n \neq j \end{cases} \quad \text{ή} \quad a \otimes e_j := \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{με } a(n) = 0 \text{ όταν } n \neq j \text{ και } a(j) = a.$$

   Δηλαδή κάθε $\vec{a} = (a(n)) \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ γράφεται $\vec{a} = \sum_n a(n) \otimes e_n$ (με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών $a(n)$).
   Γράφω για συντομία $\widetilde{\mathcal{A}}$ αντί για $\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$. [1].
   [Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{A}$.]

2. Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_o : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$$

   ως εξής: θέτουμε $\langle a \otimes e_n, b \otimes e_m \rangle_o := \langle \Phi(b^*a)\xi_n, \xi_m \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\langle \sum_n a(n) \otimes e_n, \sum_n b(n) \otimes e_n \rangle_o := \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* a(n))\xi_n, \xi_m \rangle_H \,.$$

   Προφανώς η $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι sesquilinear.
   [Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_o = \Phi(b^*a)$.]

[1] Αν ο H έχει ορθοκανονική βάση $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ χρησιμοποιούμε τον $c_{00}(\Gamma, \mathcal{A})$ αντί του $c_{00}(\mathbb{N}, \mathcal{A})$

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι για κάθε $\vec{b} = \sum\limits_{n=1}^{N} b(n) \otimes e_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$,

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o = \langle \sum_{n=1}^{N} b(n) \otimes e_n, \sum_{m=1}^{N} b(m) \otimes e_m \rangle_o \geqslant 0.$$

Πράγματι αν $X := [b(m)^* b(n)] \in M_N(\mathcal{A})$, έχουμε $[\Phi(b(m)^* b(n))] = \Phi_N(X) \in \mathcal{B}(H^N)$ και

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o := \sum_{n,m} \langle b(n) \otimes e_n, b(m) \otimes em \rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^* b(n)) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \qquad (\dagger)$$

όπου $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^\dagger$. Όμως ο πίνακας X παραγοντοποιείται

$$X = \begin{bmatrix} b(1)^* & 0 & \dots & 0 \\ b(2)^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b(N)^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b(1) & b(2) & \dots & b(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = B^* B$$

άρα είναι θετικός, οπότε (αφού η Φ_N είαι θετική απεικόνιση) ο $\Phi_N(X)$ είναι θετικός και άρα $\langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \geqslant 0$.

Άρα το $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι ημιεσωτερικό γινόμενο.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o|^2 \leqslant \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o$ έπεται ότι

$$\{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\} = \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o = 0 \ \forall \vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$$

και συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\}$$

είναι γραμμικός χώρος.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := (\mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N}))/\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$. Ο χώρος $H_{0\phi}$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο $\langle [\vec{a}], [\vec{b}] \rangle_\phi := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_o$ (όπου γράφουμε $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$). Ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o}$.

[Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.]

5. Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes e_j) := ab \otimes e_j \quad (a, b \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N})$$

$$\text{δηλαδή } \ \pi_0(a) \left(\sum_n b(n) \otimes e_n \right) := \sum_n ab(n) \otimes e_n \quad (a \in \mathcal{A}, \, \vec{b} = \sum_n b(n) \otimes e_n \in \widetilde{\mathcal{A}}.)$$

(ο $\pi_0(a)$ έχει «διαγώνιο πίνακα»).

[Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\pi_0(a)(b) = ab$.]

Ισχυρισμός. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ έχουμε

$$\langle \pi_0(a) \vec{b}, \pi_0(a) \vec{b} \rangle_o \leqslant \|a^* a\| \, \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_0 \, .$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \sum_{n,m} \langle ab(n)\otimes e_n, ab(m)\otimes e_m\rangle_o \\ &= \sum_{n,m} \langle \Phi((ab(m))^*(ab(n)))\xi_n, \xi_m\rangle_H \\ &= \sum_{n,m} \langle \Phi(b(m)^*a^*ab(n))\xi_n, \xi_m\rangle_H = \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \qquad (*)\end{aligned}$$

όπου $Y = [b(m)^*a^*ab(n)] \in M_N(\mathcal{A})$, οπότε $[\Phi(b(m)^*a^*ab(n))] = \Phi_N(Y) \in \mathcal{B}(H^N)$.

Ο πίνακας Y παραγοντοποιείται

$$Y = \begin{bmatrix} b(1)^* & 0 & \dots & 0 \\ b(2)^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b(N)^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a^*a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a^*a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(1) & b(2) & \dots & b(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} := B^*CB\,.$$

Παρατηρούμε ότι $Y \leqslant \|C\|\, B^*B$.

Πράγματι, αναπαριστώντας την C* άλγεβρα $M_N(\mathcal{A})$ ως τελεστές που δρουν σ' έναν χώρο Hilbert K (Θεώρημα Gelfand-Naimark), [2] για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle B^*CBx, x\rangle = \langle CBx, Bx\rangle \leqslant \|C\|\, \|Bx\|^2 = \|C\|\, \langle B^*Bx, x\rangle = \langle (\|C\|\, B^*B)x, x\rangle\,.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας στην ανισότητα $Y \leqslant \|C\|\, B^*B$ την θετική απεικόνιση Φ_N, προκύπτει ότι

$$\Phi_N(Y) \leqslant \|C\|\, \Phi_N(B^*B)\,.$$

Όμως $C = \mathrm{diag}(a^*a)$ και συνεπώς $\|C\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην $(*)$ έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \leqslant \langle \|C\|\, \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \\ &= \|a\|^2 \langle \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \overset{(\dagger)}{=} \|a\|^2 \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o\end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

6. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αν $\vec{u} \in \mathcal{N}$ τότε $0 \leqslant \langle \pi_0(a)\vec{u}, \pi_0(a)\vec{u}\rangle_o \leqslant \|a^*a\| \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle_o = 0$). Επομένως ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον χώρο πηλίκο $H_{o\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b\otimes e_j] = [ab\otimes e_j] \quad (b \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}).$$

7. Πάλι από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leqslant \|a\|\, \|[\vec{b}]\|_\phi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

[2] Άλλος τρόπος: επειδή $0 \leqslant C \leqslant \|C\|\mathbf{1}$, θέτοντας $D := (\|C\|\mathbf{1} - C)^{1/2}$ έχουμε $B^*(\|C\|\mathbf{1} - C)B = B^*D^*DB = (DB)^*DB \geqslant 0$, δηλαδή $B^*\, \|C\|\, B \geqslant B^*CB$.

Πράγματι,
$$\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi = \|\pi_0(a)\vec{b}\|_o \leqslant \|a\| \, \|\vec{b}\|_o = \|a\| \, \|[\vec{b}]\|_\phi \, .$$
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση
$$\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi) \, .$$
Δείχνουμε ότι η π_ϕ είναι *-αναπαράσταση:

(α) Έστω $a, a' \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $b \in \mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{N}$, έχουμε
$$\begin{aligned}
\pi_\phi(a+\lambda a')[b \otimes e_n] &= \pi_1(a+\lambda a')[b \otimes e_n] = [((a+\lambda a')b) \otimes e_n] \\
&= [(ab + \lambda a'b) \otimes e_n] = [ab \otimes e_n] + \lambda [a'b \otimes e_n] \\
&= \pi_\phi(a)[b \otimes e_n] + \lambda \pi_\phi(a')[b \otimes e_n] \\
&= (\pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a'))[b \otimes e_n] \, .
\end{aligned}$$
Επομένως, για κάθε $[\vec{b}] = [\sum_n b_n \otimes e_n] \in \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ έχουμε
$$\pi_\phi(a+\lambda a')[\vec{b}] = (\pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a'))[\vec{b}]$$
λόγω γραμμικότητας των $\pi_\phi(a+\lambda a')$ και $\pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a')$ και άρα, αφού οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς και ο $H_{0\phi}$ είναι πυκνός στον H_ϕ,
$$\pi_\phi(a+\lambda a') = \pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a') \, .$$
(β) Ομοίως, για να δείξουμε ότι
$$\pi_\phi(aa') = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')$$
αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα
$$\pi_\phi(aa')[b \otimes e_n] = \pi_\phi(a)(\pi_\phi(a')[b \otimes e_n])$$
για κάθε $b \in \mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{N}$, η οποία ισχύει γιατί
$$\pi_\phi(aa')[b \otimes e_n] = [(aa')b \otimes e_n] = [a(a'b) \otimes e_n] = \pi_\phi(a)[(a'b) \otimes e_n] = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')[b \otimes e_n] \, .$$
(γ) Δείχνουμε τέλος ότι $(\pi_\phi(a))^* = \pi_\phi(a^*)$. Αν $b, c \in \mathcal{A}$ και $n, m \in \mathbb{N}$, έχουμε
$$\begin{aligned}
\langle (\pi_\phi(a))^*[b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi &= \langle [b \otimes e_n], \pi_\phi(a)[c \otimes e_m] \rangle_\phi = \langle [b \otimes e_n], [ac \otimes e_m] \rangle_\phi \\
&= \langle b \otimes e_n, ac \otimes e_m \rangle_o \\
&= \langle \Phi((ac)^* b)\xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi(c^*(a^*b))\xi_n, \xi_m \rangle_H \\
&= \langle (a^*b) \otimes e_n, c \otimes e_m \rangle_o = \langle [a^*b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi \\
&= \langle \pi_\phi(a^*)[b \otimes e_n], [c \otimes e_m] \rangle_\phi
\end{aligned}$$
Από τη γραμμικότητα των $(\pi_\phi(a))^*$ και $\pi_\phi(a^*)$ έπεται ότι για κάθε $[\vec{b}], [\vec{c}] \in \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ θα έχουμε
$$\langle (\pi_\phi(a))^*[\vec{b}], [\vec{c}] \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(a^*)[\vec{b}], [\vec{c}] \rangle_\phi$$
και επομένως, λόγω συνέχειας των τελεστών αυτών έπεται ότι θα ταυτίζονται και στον H_ϕ.

8. Αν $H_0 = \text{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορίζουμε

$$V : H_0 \to \widetilde{\mathcal{A}} \to H_\phi : \xi_n \to \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes e_n \to [\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes e_n]$$

και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$V\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathbf{1} \otimes e_n] \quad (\lambda_n \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N}).$$

Για κάθε $\xi = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n \xi_n \in H_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|V\xi\|_{H_\phi}^2 &= \langle \sum_n \lambda_n [\mathbf{1} \otimes e_n], \sum_m \lambda_m [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_\phi \\
&= \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle [\mathbf{1} \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_\phi \\
&= \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle \Phi(\mathbf{1}^* \mathbf{1}) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \sum_{n,m} \lambda_n \overline{\lambda_m} \langle \xi_n, \xi_m \rangle_H \\
&= \sum_n |\lambda_n|^2 = \|\xi\|_H^2
\end{aligned}$$

δηλαδή η V είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V : H \to H_\phi$. Τέλος, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\langle (V^* \pi(a) V) \xi_n, \xi_m \rangle_H &= \langle \pi(a) V \xi_n, V \xi_m \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a) [\mathbf{1} \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} \\
&= \langle [a \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m] \rangle_{H_\phi} = \langle \Phi(\mathbf{1}^* a) \xi_n, \xi_m \rangle_H
\end{aligned}$$

άρα $\langle (V^* \pi(a) V) \xi, \eta \rangle_H = \langle \Phi(\mathbf{1}^* a) \xi, \eta \rangle_H \qquad$ για κάθε $\xi, \eta \in H_0$

λόγω γραμμικότητας. Δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές $V^* \pi(a) V$ και $\Phi(a)$ ταυτίζονται σε ένα πυκνό υποσύνολο του χώρου H και συνεπώς

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a)\,. \qquad \square$$