Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις II

Σπυρίδων Πετράκος

23 Νοεμβρίου 2020

Άσκηση 1. **(α)** Έστω $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *-μορφισμός, $\mathcal{A}$ χωρίς μονάδα. Θα δείξουμε ότι ο Φ επεκτείνεται μοναδικά σε μοναδιαίο *-μορφισμό $\Phi^\sim : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{C}$ όπου $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, αν η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα, και $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{B}}$, διαφορετικά. Ορίζουμε $\Phi^\sim(a + \lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) + \lambda\mathbf{1}$, όπου στην πρώτη περίπτωση το άθροισμα είναι στην $\mathcal{B}$, ενώ στη δεύτερη είναι το αντίστοιχο στοιχείο στη μοναδοποίησή της. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\Phi^\sim$ είναι μοναδιαίος *-μορφισμός (και στις δύο περιπτώσεις). Από την άλλη, αν Ψ είναι μια άλλη επέκταση, λόγω γραμμικότητας θα πρέπει αναγκαστικά $\Psi(a+\lambda\mathbf{1}) = \Psi(a)+\lambda\Psi(\mathbf{1}) = \Phi(a)+\lambda\mathbf{1}$, δηλαδή $\Psi = \Phi^\sim$.
(β) Έχουμε $\lambda \in \sigma(\Phi(a)) \Rightarrow \Phi(a) - \lambda\mathbf{1} \notin \mathsf{Inv}(B) \Rightarrow \Phi^\sim(a + \lambda\mathbf{1}) \notin \mathsf{Inv}(B) \Rightarrow$ a-λ1
$a + \lambda\mathbf{1} \notin \mathsf{Inv}(\tilde{\mathcal{A}}) \Rightarrow \lambda \in \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}(a) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a) \cup \{0\}$ όπου $B = \mathcal{B}$, αν η $\mathcal{B}$ έχει a-λ1
μονάδα, και $B = \tilde{\mathcal{B}}$, διαφορετικά, και $\Phi^\sim$ όπως στο (α). Αν επιπλέον ο Φ είναι μοναδιαίος, αναγκαστικά $\Phi(\mathsf{Inv}(\mathcal{A})) \subseteq \mathsf{Inv}(\mathcal{B})$, και εφόσον $\Phi(a-\lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) - \lambda\mathbf{1}$, έχουμε $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε τη μοναδοποίηση $\tilde{B}$ της B. Προφανώς η B είναι επίσης μεταθετική πεπερασμένης διάστασης. Από το θεώρημα Gelfand-Neimark, $\tilde{B} \cong C(\Omega(\tilde{B}))$. Εαν το $\Omega(\tilde{B})$ είναι άπειρο, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Omega(\tilde{B})$. Από το λήμμα του Urysohn, υπάρχουν $f_i \in C(\Omega(\tilde{B}))$ με $f_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$, οι οποίες προφανώς είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως $\mathsf{dim}(\tilde{B}) = \mathsf{dim}(C(\Omega(\tilde{B}))) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Επομένως το $\Omega(\tilde{B})$ είναι πεπερασμένο, άρα και το $\Omega(B) \subseteq \Omega(\tilde{B})$ είναι. Τελικά $B \cong C_0(\Omega(B)) = C(\Omega(B))$, δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Έστω $a \in A$ φυσιολογικό. Από συναρτησιακό λογισμό, η $C(\sigma(a))$ είναι ισομετρικά ισομορφική με υποάλγεβρα της $\tilde{A}$ (της A αν η A έχει μονάδα) και άρα έχει πεπερασμένη διάσταση. Από την Άσκηση 2, το $\sigma(a)$ είναι πεπερασμένο, οπότε οι χαρακτηριστικές $p_\lambda := \mathbb{1}_{\{\lambda\}}, \lambda \in \sigma(a)$ είναι συνεχείς. Από την υπόθεση για τη διάσταση της A, το $\sigma(a)$ έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία για κάποιο φυσιολογικό a. Επιλέγουμε ένα τέτοιο a και ένα $\lambda \in \sigma(a) \setminus \{0\}$. Τότε $p_\lambda(0) = 0 \Rightarrow p_\lambda(a) \in A$ και προφανώς $p_\lambda = p_\lambda^* = p_\lambda^2 \Rightarrow p_\lambda(a) = (p_\lambda(a))^* = (p_\lambda(a))^2$ ενώ εξ ορισμού δεν είναι ούτε η μονάδα ούτε 0.

Άσκηση 4. Για $f \in C([0,1])$, $f = f^2 \Rightarrow f(1-f) = 0 \Rightarrow (f \equiv 0 \vee f \equiv 1)$ λόγω συνέχειας.

Άσκηση 5. Με το συμβολισμό της Άσκησης 3, έχουμε ότι για κάθε φυσιολογικό $a \in A$ ισχύει $a = \mathsf{Id}(a) = \sum_{\lambda\in\sigma(a)} \lambda p_\lambda(a)$. Επομένως, αν οι φ, ψ συμφωνούν σε όλες τις προβολές, θα συμφωνούν και σε όλα τα φυσιολογικά στοιχεία, λόγω γραμμικότητας, και άρα σε όλα τα στοιχεία της A, για τον ίδιο λόγο.

Άσκηση 6. Έστω $\varphi \neq \psi$ και προβολή p με $\varphi(p) \neq \psi(p)$. Τότε $\varphi(p) = \varphi(p^2) = (\varphi(p))^2$ και ομοίως για τον ψ, άρα $\{\varphi(p), \psi(p)\} = \{0, 1\}$. Επομένως $|\varphi(p) - \psi(p)| = 1 \Rightarrow \|\varphi - \psi\| \geq 1$, αφού $\|p\| = 1$.

Άσκηση 7. Έχουμε $|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \|x_n^* - x^*\| \, |x|$. Άρα $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* \Rightarrow x_n^* \longrightarrow x^*$ κατά σημείο. Για το αντίστροφο, έστω $e_1, \ldots, e_m$ μια βάση του E και $e_1^*, \ldots, e_m^*$ η δυϊκή βάση. Τότε $\|x_n^* - x^*\| = \|\sum_{i=1}^m (x_n^*(e_i) - x^*(e_i))e_i^*\| \leq \sum_{i=1}^m |x_n^*(e_i) - x^*(e_i)| \, \|e_i^*\| \longrightarrow 0$, αν $x_n^* \longrightarrow x^*$ κατά σημείο.

Άσκηση 8. Αν το σύνολο των χαρακτήρων ήταν άπειρο, θα υπήρχε ακολουθία $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαφορετικών ανά δύο χαρακτήρων. Επειδή $\|\varphi_n\| \leq 1$, λόγω συμπάγειας της κλειστής μοναδιαίας μπάλας στην ασθενή *-τοπολογία, θα υπήρχε υπακολουθία $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ που να συγκλίνει στην ασθενή *-τοπολογία. Από την Άσκηση 7, αυτή θα συγκλίνει και στην τοπολογία της νόρμας του δυϊκού, το οποίο είναι άτοπο από την Άσκηση 6.