ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ (β)

Στα επόμενα, η A είναι μια C* άλγεβρα *πεπερασμένης διάστασης*. Στόχος είναι να δείξουμε ότι η A έχει αναγκαστικά μονάδα και ότι έχει πεπερασμένο πλήθος χαρακτήρων.

Άσκηση 2. *Αν B είναι* μεταθετική *υπάλγεβρα της A, δείξτε ότι είναι ισομετρικά ισόμορφη με την C* άλγεβρα $\mathbb{C}^k$ όπου $k \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα με την $C(K)$ όπου K πεπερασμένο σύνολο με την διακριτή τοπολογία.*

Συνεπώς κάθε μεταθετική C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης έχει μονάδα και πεπερασμένο, άρα συμπαγές, σύνολο χαρακτήρων.

Απόδειξη. Η C* άλγεβρα $B \oplus \mathbb{C}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $C(K)$, όπου K ο χώρος των χαρακτήρων της. Τότε όμως η $C(K)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, επομένως το K είναι πεπερασμένο. Το ίδιο λοιπόν ισχύει για το (μικρότερο) σύνολο χαρακτήρων της B.

Παρατήρηση Επομένως δείξαμε ότι η B είναι ισομετρικά ισόμορφη με την C* άλγεβρα $\ell^\infty(k)$ (δηλ. την $\mathbb{C}^k$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και νόρμα sup) όπου k το πλήθος των χαρακτήρων της B.

Ειδικότερα, δείξαμε ότι η B έχει μονάδα.

Άσκηση 3. *Αν $\dim A > 1$, δείξτε ότι η A περιέχει μια μη τετριμμένη προβολή, δηλαδή ένα $p \in A$ με $p = p^2 = p^*$ που είναι μη μηδενικό και δεν είναι μονάδα της A.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει αυτοσυζυγές $a \in \mathcal{A}$ που το φάσμα του δεν είναι μονοσύνολο.

Πράγματι, αν ένα $a = a^* \in \mathcal{A}$ έχει $\sigma(a) = \{\lambda_a\}$ τότε το στοιχείο $a - \lambda_a \mathbf{1}$ έχει φάσμα $\{0\}$, άρα έχει φασματική ακτίνα 0 οπότε (αφού είναι φυσιολογικό) έχει νόρμα 0, άρα $a = \lambda_a \mathbf{1}$. Αν αυτό συμβαίνει για κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο της $\mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{C}$ (αντίθετα με την υποθεσή μας), γιατί κάθε $x \in \mathcal{A}$ γράφεται $x = a + ib$ με a, b αυτοσυζυγή, οπότε $x = \lambda_a \mathbf{1} + i\lambda_b \mathbf{1} \in \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Θεωρούμε την C*-υπάλγεβρα $B \subseteq A$ που παράγεται από το a. Είναι αβελιανή, άρα (από την Ασκ. 2) ισομορφική με την $\ell^\infty(k)$ για καποιο $k > 1$. Τώρα η εικόνα στην B οποιασδήποτε μη τετριμμένης προβολής στην $\ell^\infty(k)$ (για παράδειγμα, της e_1) είναι προβολή στην B, άρα και στην A. □

Άσκηση 4. *Δεν έχουν όλες οι C* άλγεβρες μη-τετριμμένες προβολές: δείξτε (για παράδειγμα) ότι η $C([0, 1]$ δεν έχει καμμία.*

Απόδειξη. Γενικότερα, αν $f \in C(K)$ είναι μη-τετριμμένη προβολή, τότε $f(t)(1-f(t)) = 0$ για κάθε $t \in K$, οπότε $f(K) = \{0, 1\}$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $f^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό, αλλά και το συμπλήρωμά του $f^{-1}(\{1\})$ είναι κι αυτό κλειστό. Δηλαδή το K είναι ξένη ένωση δυο κλειστών μη κενών συνόλων. Στο $[0, 1]$ αυτό δεν μπορεί να συμβεί (γενικότερα, σε κανέναν συνεκτικό χώρο).

Άσκηση 5. *Αν ϕ και ψ είναι δυο διαφορετικοί χαρακτήρες της A, δείξτε ότι υπάρχει μια προβολή $p \in A$ ώστε $\phi(p) \neq \psi(p)$.*

Απόδειξη. Τα ϕ και ψ διαφέρουν σε κάποιο $a \in A$. Θεωρώντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος του a, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $b = b^* \in A$ με $\phi(b) \neq \psi(b)$. Όμως η C*-υπάλγεβρα $B \subseteq A$ που παράγει το b είναι αβελιανή (της μορφής $\ell^\infty(k)$), οπότε παράγεται από τις προβολές της. Αν λοιπόν $\phi(p) = \psi(p)$ για κάθε προβολή $p \in B$, τότε $\phi(b) = \psi(b)$, άτοπο. □

Άσκηση 6. *Αν ϕ και ψ είναι δυο χαρακτήρες της A και $\|\phi - \psi\| < 1$ (η νόρμα είναι του δυικού της A), δείξτε ότι τότε $\phi = \psi$.*

Απόδειξη. Αν ϕ είναι είναι χαρακτήρας και p προβολή, τότε $\phi(p) = \phi(p^2) = (\phi(p))^2$, άρα $\phi(p) \in \{0, 1\}$. Αν όμως $\phi \neq \psi$ υπάρχει προβολή p ώστε $\phi(p) - \psi(p) \neq 0$. Τότε όμως

$$1 = |\phi(p) - \psi(p)| \leqslant \|\phi - \psi\| \|p\| < 1$$

(διότι, για κάθε μη μηδενική προβολή $p \in A$ έχουμε $\|p\|^2 = \|p^*p\| = \|pp\| = \|p\|$ άρα $\|p\| = 1$.) Η αντίφαση αυτή δείχνει ότι $\phi = \psi$.

Άσκηση 7. *Αν E είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι η ασθενής *-τοπολογία στον δυικό χώρο E^* ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας του E^*.*

Άσκηση 8. *Δείξτε ότι μια C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος χαρακτήρων.*

Απόδειξη. Το σύνολο των χαρακτήρων περιέχεται (όπως έχουμε δείξει) στη μοναδιαία μπάλα του δυικού της A. Αφού η A έχει πεπερασμένη διάσταση, το ίδιο ισχύει για το δυικό της, οπότε η μοναδιαία του μπάλα θα είναι συμπαγής στην τοπολογία της νόρμας (από την άσκηση 7).

Επομένως αν υπήρχαν άπειροι χαρακτήρες, θα υπήρχε μια ακολουθία (ϕ_n) απο διαφορετικούς ανά δύο χαρακτήρες που θα ήταν norm-συγκλίνουσα και συνεπώς norm-Cauchy. Τότε, για μεγάλα n και m θα είχαμε $\|\phi_n - \phi_m\| < 1$, οπότε $\phi_n = \phi_m$ (από την άσκηση 6), άτοπο. □

Άσκηση 9. *Δείξτε ότι κάθε C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης έχει μονάδα.*

Απόδειξη. Έστω A C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και έστω $B = A \oplus \mathbb{C}$ (υπενθυμίζουμε ότι η B είναι C*-άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1} := 0 \oplus 1$).

Έστω $C \subseteq A$ μια *μεγιστική* αβελιανή *-υπάλγεβρα της A. [1] Αφού η C είναι μεταθετική, όπως είδαμε νωρίτερα αναγκαστικά έχει μονάδα, έστω p.

Θα δείξουμε ότι η p είναι μονάδα της A.

Η p είναι προβολή στην A. Ορίζουμε $q := \mathbf{1} - p$: είναι μια προβολή στην B.

Θεωρούμε την C* άλγεβρα qAq. Είναι C* υπάλγεβρα της A (αφού η A είναι ιδεώδες στην B). Αν είναι μη μηδενική, θα περιέχει ένα αυτοσυζυγές στοιχείο $b = qaq$. Παρατήρησε όμως ότι $b = qaq = qqaqq = qbq$ οπότε για κάθε $c \in C$ θα έχουμε $cb = bc = 0$ (αφού $c = cp$ και $pq = 0$). Έπεται ότι η γραμμική θήκη $\text{span}(C \cup \{b\})$ είναι μεταθετική C*-υπάλγεβρα της A με διάσταση μεγαλύτερη από την C, αντίθετα από την υπόθεσή μας για την C.

Δείξαμε λοιπόν ότι $qAq = \{0\}$.

Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$a = (p + q)a(p + q) = pap + paq + qap + qaq = pap + paq + qap\,.$$

Θέτουμε $d := qap$. Έχουμε $dd^* = qapa^*q \in qAq = \{0\}$, άρα $\|d\|^2 = \|dd^*\| = 0$, οπότε $d = 0$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $paq = 0$. Τελικά λοιπόν $a = pap$ και άρα η p είναι μονάδα της A. □

[1] Η A έχει αβελιανές *-υπάλγεβρες, όπως είδαμε στην Άσκηση 3. Για την C, επιλέγουμε μια αβελιανή *-υπάλγεβρα της A με τη μεγαλύτερη δυνατή διάσταση.