ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ (α)

Άσκηση 1. **(α)** *Δείξτε ότι κάθε *-μορφισμός $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών χωρίς μονάδα επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό $\Phi^\sim : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ θέτοντας $\Phi^\sim(a + \lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) + \lambda\mathbf{1}$. Αν η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα τότε ο Φ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό $\Phi^\sim : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$.*

(β) *Αν $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι *-μορφισμός, δείξτε ότι $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a) \cup \{0\}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Αν οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουν μονάδα και $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ δείξτε ότι $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Για ευκολία, με το σύμβολο $\mathcal{B}_m$ θα εννοούμε την άλγεβρα $\mathcal{B}$ όταν η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα και την άλγεβρα $\tilde{\mathcal{B}}$ όταν η $\mathcal{B}$ δεν έχει μονάδα.

(α) Αν η $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι γραμμική, είναι σαφές ότι η $\Phi^\sim(a + \lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) + \lambda\mathbf{1}$ είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση απ'την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{B}_m$ που επεκτείνει την Φ και στέλνει την μονάδα της $\tilde{\mathcal{A}}$ στη μονάδα της $\mathcal{B}_m$ (είναι δηλ. μοναδιαία: unital). Κάθε άλλη μοναδιαία επέκταση θα συμπίπτει με την $\Phi^\sim$ στην $\mathcal{A}$ και επίσης στο $\{(0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, άρα θα συμπίπτει με την $\Phi^\sim$ στη γραμμική τους θήκη, που είναι η $\mathcal{A}^\sim$.

Είναι τώρα εύκολο να ελέγξει κανείς ότι αν η Φ είναι *-μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την $\Phi^\sim$.

Για το (β), διακρίνουμε περιπτώσεις:

*Περίπτωση 1: Η $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μοναδαίος *-μορφισμός μεταξύ αλγεβρών με μονάδα.*

Αν $\lambda \notin \sigma(a)$ υπάρχει $b \in \mathcal{A}$ με $(a - \lambda\mathbf{1})b = b(a - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.
Τότε $(\Phi(a) - \lambda\mathbf{1})\Phi(b) = \Phi(b)(\Phi(a) - \lambda\mathbf{1}) = \Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ άρα $\lambda \notin \sigma(\Phi(a))$.

*Περίπτωση 2 : Η $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι *-μορφισμός και η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα.*

Εφαρμόζουμε την περίπτωση 1 στον μοναδιαίο μορφισμό $\Phi^\sim : \mathcal{A}^\sim \to \mathcal{B}_m$ οπότε [1] έχουμε

$$\sigma(\Phi(a)) = \sigma_{\mathcal{B}_m}(\Phi^\sim(a, 0)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}^\sim}((a, 0)) = \sigma(a).$$

Σημείωση: Και στις δύο περιπτώσεις, δείξαμε ότι $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$.

Περίπτωση 3: Η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, αλλά το $\Phi(\mathbf{1})$ δεν είναι η μονάδα της $\mathcal{B}$.

Θεωρούμε την Φ ως απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{B}_m$. Θέτουμε $\Phi(\mathbf{1}) := p$ και $q = \mathbf{1} - p$. Παρατηρούμε ότι $p^2 = p$, $q^2 = q \neq 0$, $pq = qp = 0$ και $\Phi(a)q = q\Phi(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, αφού $\Phi(a)p = p\Phi(a) = \Phi(a)$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda \notin (\sigma(a) \cup \{0\})$. Υπάρχει $b \in \mathcal{A}$ ώστε $(a - \lambda\mathbf{1})b = b(a - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.
Επομένως $(\Phi(a) - \lambda p)\Phi(b) = \Phi(b)(\Phi(a) - \lambda p) \overset{(*)}{=} p$. Επειδή $\lambda \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\Phi(a) - \lambda\mathbf{1})(\Phi(b) - \lambda^{-1}q) &= ((\Phi(a) - \lambda p) - \lambda q)(\Phi(b) - \lambda^{-1}q) \quad (\text{γιατί } p + q = \mathbf{1}) \\ &= (\Phi(a) - \lambda p)\Phi(b) - \lambda q\lambda^{-1}q \quad (\text{γιατί } (\Phi(a) + \lambda p)q = 0) \\ &= p + q \quad (\text{από την } (*)) \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

και ομοίως $(\Phi(b) - \lambda^{-1}q)(\Phi(a) - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Επομέμως $\lambda \notin \sigma(\Phi(a))$. Δείξαμε ότι $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a) \cup \{0\}$. □

[1] Υπενθυμίζουμε ότι όταν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, τότε ορίζουμε $\sigma(a) := \sigma_{\mathcal{A}^\sim}((a, 0))$.